

Éléments mortiers et maillages hybrides pour les équations de Maxwell en régime transitoire

Stage proposé par Gary Cohen, projet POEMS

gary.cohen@inria.fr

La résolution précise des équations des ondes en régime transitoire est un problème fondamental aux multiples applications civiles et militaires. Cette résolution doit se faire en général dans des domaines à géométrie complexe, ce qui privilégie naturellement l'utilisation de méthodes d'éléments finis. Ce type de méthode s'est heurté pendant longtemps au problème de la présence d'une matrice de masse non-diagonale dont l'inversion pénalisait fortement les performances de ces méthodes par rapport aux méthodes de différences finies.

Une première solution à ce problème a été donnée par l'utilisation de méthodes d'éléments finis mixtes spectrales (utilisant des maillages hexaédriques) [1] qui conduisent à une condensation de masse ainsi qu'à des matrices de rigidité creuses dont le stockage était négligeable. Toutes ces propriétés débouchent sur des algorithmes rapides et à faible stockage. Malheureusement, la construction de maillages hexaédriques est souvent ardue voire impossible.

Une deuxième solution est l'utilisation de méthodes de Galerkin discontinues (GD) sur des maillages tétraédriques [2] dont le caractère discontinu conduit à des matrices de masse diagonales par blocs. Ces méthodes sont équivalentes aux précédentes en termes de stockage, mais beaucoup moins performantes en temps de calcul (3 à 6 fois moins rapides). Elles ont cependant l'avantage d'utiliser des maillages tétraédriques, faciles à construire.

Un palliatif au défaut des maillages hexaédriques est l'utilisation de maillages hybrides pour des méthodes GD, c'est-à-dire majoritairement hexaédriques et comportant aussi des pyramides, des tétraèdres voire des prismes [3]. Toutefois, la présence de pyramides, indispensable pour garder la conformité des maillages, induit un surcoût en temps de calcul qui réduit les performances de la méthode par rapport à l'utilisation de maillages purement hexaédriques.

Le but de ce stage est la résolution des équations des ondes sur maillages hybrides ne contenant que des hexaèdres et des tétraèdres. De tels maillages posent un problème majeur de conformité. En effet, outre le fait que les faces des hexaèdres sont quadrilatérales et celles des tétraèdres triangulaires, les quadrilatères formant les faces d'hexaèdres ne sont pas plans en général alors que les faces triangulaires sont planes. De ce fait, leur raccord ne peut se faire a priori par des méthodes de type GD. Un palliatif à cette difficulté est l'utilisation d'éléments mortiers pour passer d'un type d'élément à l'autre car ceux-ci permettent des raccords de domaines avec overlapping ou underlapping.

Une autre utilisation des éléments mortiers serait un traitement efficace de milieux multicouches dont l'approximation optimale se fonde sur l'adaptation de la taille des éléments aux vitesses dans les différentes couches. Dans la mesure du possible, l'étudiant pourra étudier pour cela différentes stratégies assurant un couplage local aux interfaces des couches.

Ces techniques seront appliquées aux méthodes de Galerkin discontinues en électromagnétisme. L'étudiant devra construire et valider un modèle numérique fondé sur ces techniques.

[1] G. Cohen, *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*, Scientific Computation, Springer-Verlag., Heidelberg, 2001.

[2] J. S. Hesthaven and T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods*, Texts in Applied Mathematics, vol. 54, Springer-Verlag, 2008.

[3] M. Bergot, G. Cohen and M. Duruflé, *Higher-Order Finite Elements for Hybrid Meshes using New Nodal Pyramidal Elements*, J. of Sci. Comp, vol. 42(3) pp. 345-381, March 2010.