

CONCEPTION DE PERTURBATIONS INVISIBLES POUR LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES OU ACOUSTIQUES

Proposition de sujet de thèse DGA – 13 février 2015

Le présent sujet est proposé dans le cadre d'une collaboration entre l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'Ensta ParisTech et le Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique. L'étudiant sera co-encadré par Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia (directrice de recherches au CNRS, membre de l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'Ensta ParisTech) et Lucas Chesnel (post-doctorant lecteur Hadamard à l'École Polytechnique). La directrice de thèse sera Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia.

1 Problématique générale

Si les questions de furtivité et de camouflage motivent depuis longtemps une activité importante dans le domaine de l'étude des phénomènes de propagation d'ondes, le thème de l'invisibilité suscite actuellement un intérêt nouveau de la communauté scientifique. Ceci vient en particulier des espoirs de fabrication de métamatériaux aux propriétés extraordinaires. De nombreux travaux visent à concevoir des objets, pénétrables ou non, qui sont invisibles dans certaines conditions expérimentales. Notre sujet s'inscrit dans cette démarche.

Un métamatériau est une structure, réalisée à partir de résonateurs petits devant la longueur d'onde, que l'on construit pour qu'elle se comporte comme un matériau homogène de permittivité diélectrique ε et de perméabilité magnétiques μ données. C'est cette maîtrise des coefficients physiques qui fait l'intérêt des métamatériaux. Elle permet de contrôler le champ électromagnétique. C'est ainsi que des chercheurs ont imaginé créer des capes d'invisibilité. Pour cette application, l'idée consiste à choisir, en utilisant des techniques de transformations optiques, ε et μ dans une couronne autour de l'objet que l'on souhaite dissimuler, de sorte qu'un rayon lumineux arrivant sur la structure la contourne sans subir d'interaction (voir une illustration de ce phénomène avec la Figure 1). C'est ce que l'on appelle en anglais la technique du *cloaking*.

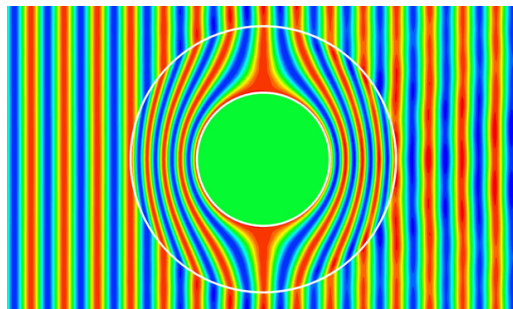


FIGURE 1 – Principe de la technique du *cloaking*. Pour l'observateur situé à droite, tout se passe comme si l'onde plane incidente arrivant par la gauche n'avait rencontré aucun obstacle. L'objet au centre de la structure est donc invisible pour l'observateur.

Le principe théorique de la technique du *cloaking* est finalement relativement simple. Il n'en va pas de même de sa mise en œuvre pratique. Ceci est lié au fait que le métamatériau pour réaliser la structure doit présenter des valeurs singulières (infinies en certains points) des coefficients

physiques ε , μ . À l'heure actuelle, il semble illusoire de pouvoir concevoir un tel dispositif.

La piste alternative pour construire des objets invisibles que nous avons commencé à explorer et dont nous souhaitons poursuivre l'étude repose sur la constatation suivante. En pratique, pour mettre en place les méthodes de reconstruction, d'imagerie, de contrôle non destructif, l'on ne dispose que d'un ensemble fini de capteurs et d'émetteurs. Dans ce contexte, pour un dispositif donné, un objet est invisible s'il fournit un ensemble fini de mesures nulles. Cette définition de l'invisibilité est moins exigeante que la technique de *cloaking* décrite ci-dessus. L'avantage est qu'elle est plus facilement réalisable.

Une méthode originale a été proposée dans [3] pour fabriquer des perturbations invisibles de guides d'ondes acoustiques. Plus précisément, pour ce problème, si les mesures sont effectuées à une fréquence fixée en champ lointain, puisqu'il n'existe qu'un nombre fini de modes propagatifs, toutes les informations disponibles sont contenues dans la matrice de scattering. Dans [3] (voir également [2] pour les aspects numériques), nous avons montré comment construire des guides d'ondes comportant un défaut pour lesquels la matrice de scattering est la même que celle d'un guide d'ondes non perturbé.

Il se trouve que la technique utilisée est relativement générale et peut être adaptée à d'autres problèmes. Dans [1], nous avons construit des inclusions invisibles dans l'espace libre lorsqu'on envoie des ondes planes et que l'on observe les champs diffractés dans un nombre fini de directions. Dans [5], nous avons prouvé l'existence de conductivités qui fournissent le même jeu de mesures qu'une conductivité de référence donnée pour le problème de tomographie d'impédance électrique quand on dispose d'un nombre fini d'électrodes ponctuelles. Dans [4], nous avons fabriqué des déformations du fond marin qui ne perturbent pas la houle. Dans cette proposition de sujet de thèse, de façon générale, nous souhaitons poursuivre l'adaptation de la méthode à de nouveaux problèmes (au cas des équations de Maxwell notamment), comprendre les limitations de la technique, proposer des solutions pour dépasser ces limitations, et enfin développer des codes numériques efficaces.

2 Programme de la thèse

De façon à décrire un programme de recherche détaillé, nous allons commencer par présenter le principe de la méthode mentionnée ci-dessus et introduite dans [3].

2.1 Principe de la méthode

Considérons un problème de diffraction où la perturbation d'un milieu de référence donné est représentée par une fonction σ (la forme de la paroi du guide d'onde ou du fond marin, l'indice d'une hétérogénéité, etc). Supposons que l'on dispose d'un nombre fini N de mesures $F(\sigma) = (F_1(\sigma), F_2(\sigma), \dots, F_N(\sigma)) \in \mathbb{R}^N$ pour détecter la perturbation. Quand il n'y a pas de défaut, les mesures sont nulles : $F(0) = 0$. Notre objectif est de construire des σ non nuls tels que $F(\sigma) = 0$. Les défauts associés à ces σ sont alors impossibles à discerner à partir des mesures.

Si l'on recherche pour commencer une petite perturbation, on peut écrire un développement limité de F au voisinage de $\sigma = 0$:

$$F(\sigma) = DF(0) \cdot \sigma + \mathcal{O}(\|\sigma\|^2), \quad (1)$$

où la différentielle de F en 0 notée $DF(0)$ est une application linéaire à valeurs dans \mathbb{R}^N . Il est facile de trouver des perturbations σ_0 telles que

$$DF(0) \cdot \sigma_0 = 0 \quad (2)$$

car (2) est un système de N équations linéaires homogènes et l'inconnue σ_0 est une fonction (qui peut être représentée par une infinité de degrés de liberté). Une perturbation de la forme $\sigma = \varepsilon\sigma_0$ est donc peu visible pour ε petit puisque

$$F(\varepsilon\sigma_0) = \mathcal{O}(\varepsilon)^2.$$

Néanmoins, elle n'est pas complètement invisible. L'idée proposée par Sergei Nazarov est de chercher une (petite) correction qui la rende totalement invisible. Plus précisément, on cherche la perturbation sous la forme

$$\sigma = \varepsilon(\sigma_0 + \sigma^\delta).$$

Si la différentielle $DF(0)$ est non dégénérée (c'est-à-dire si elle est de rang N), on peut paramétrer astucieusement σ^δ de sorte que l'équation

$$F(\varepsilon(\sigma_0 + \sigma^\delta)) = 0 \tag{3}$$

soit une équation de point fixe contractante en σ^δ pour ε suffisamment petit.

Cette approche présente deux avantages majeurs. D'une part, elle donne lieu à un algorithme numérique facile à mettre en œuvre et rapidement convergent : il suffit de résoudre le problème de point fixe (3) en utilisant une méthode itérative. D'autre part, l'utilisateur peut par le choix de σ_0 imposer les principales caractéristiques de la perturbation, et chercher à satisfaire à un cahier des charges lié au contexte de l'étude. En effet, l'algorithme de point de fixe ne fait que moduler légèrement la perturbation choisie σ_0 afin d'en assurer l'invisibilité. Cette approche est donc très différente des méthodes complètement numériques qui peuvent converger vers des perturbations irréalisables en pratique.

2.2 Axes de recherche envisagés

A. Choix des paramétrages. Dans un premier temps, l'étudiant se familiarisera avec la méthode en réalisant des expériences numériques à partir des codes existants pour traiter des cas bidimensionnels scalaires. Il s'intéressera à l'influence du choix de σ_0 et du paramétrage de σ^δ sur le résultat. En particulier, il étudiera la valeur limite de ε assurant la convergence de l'algorithme de point fixe. Un objectif est, pour le cas de l'espace libre, de proposer des choix de σ_0 qui soient autant que possible réalisables en pratique. On pourra par exemple chercher à ce que l'obstacle associé corresponde à la réunion d'inclusions homogènes disjointes de géométrie donnée, les degrés de liberté étant alors la position, l'indice et la taille de chaque objet. Un autre objectif est d'obtenir des résultats probants pour le guide d'onde en régime multimodal.

B. Rétération du processus. Pour que l'équation (3) de point fixe soit contractante, il est nécessaire que le paramètre ε soit assez petit. Ceci conduit à fabriquer des défauts invisibles qui sont des petites perturbations du milieu de référence. Les expériences numériques que nous avons pour le moment menées semblent indiquer que plus le nombre de mesures est important, plus les défauts construits sont petits (au sens large du terme, c'est-à-dire en terme d'amplitude). La Figure 2 illustre ce phénomène pour le problème de tomographie d'impédance électrique. L'idée que nous proposons de tester pour repousser cette limitation est de réitérer le processus en repartant du défaut invisible obtenu. L'objectif consiste à faire croître petit à petit la perturbation pour construire un défaut de plus en plus conséquent dans le milieu de référence.

L'étudiant commencera par expérimenter cette idée sur le cas le plus simple du problème de diffraction dans l'espace libre. La difficulté principale réside dans le fait qu'il faut maintenant étudier la différentielle DF en $\sigma \neq 0$. Plus précisément, il s'agira de prouver théoriquement que $DF(\sigma)$ n'est pas dégénérée. Il faudra également étudier si en itérant, on peut toujours réellement faire croître le défaut. Il est possible que l'on soit contraint après un certain nombre d'opérations

de réduire à nouveau le défaut. L’objectif assigné à l’étudiant est de mener des expériences numériques afin de décrire les différents scénarios possibles.

C. Extension à l’électromagnétisme. Pour le moment, nous avons développé l’approche §2.1 uniquement pour des problèmes scalaires bidimensionnels. L’étudiant sera chargé d’adapter la méthode aux équations de Maxwell tridimensionnelles. De nouveau, la question théorique importante concerne la non-dégénérescence de la différentielle $DF(\sigma)$ qu’il faudra examiner avec soin. La mise en œuvre numérique sera réalisée en utilisant le code *XLife++* du laboratoire POEMS.

D. Étude des cas dégénérés. Pour certaines configurations dépendant de la position des capteurs/émetteurs, de la fréquence considérée, ..., il est facile de voir que la différentielle $DF(0)$ est dégénérée. Dans ces situations, on ne peut pas mettre en place la technique décrite en §2.1. C’est par exemple le cas pour le problème d’acoustique en espace libre (voir [1]) lorsque parmi les directions d’observation se trouve la direction d’incidence. Dans cette situation, nous avons prouvé qu’imposer l’invisibilité dans la direction d’incidence nécessite d’imposer l’invisibilité dans toutes les directions. Ceci n’est sans doute pas réalisable avec des matériaux classiques. Pour les autres problèmes que nous avons considérés jusqu’à présent, lorsque la différentielle est dégénérée, nous ne disposons pas d’une analyse aussi fine. Plus précisément, nous ne savons pas si nous sommes simplement confrontés à une difficulté technique (la méthode §2.1 échoue mais peut-être peut-on l’adapter légèrement pour la faire fonctionner) ou si nous faisons face à une véritable obstruction physique (comme c’est le cas pour le problème d’acoustique en espace libre dont nous venons de parler). Une idée pour traiter les cas où l’approche de §2.1 est inopérante pour une raison technique serait d’exploiter les termes d’ordre supérieur dans le développement de Taylor (1) pour contrôler le reste.

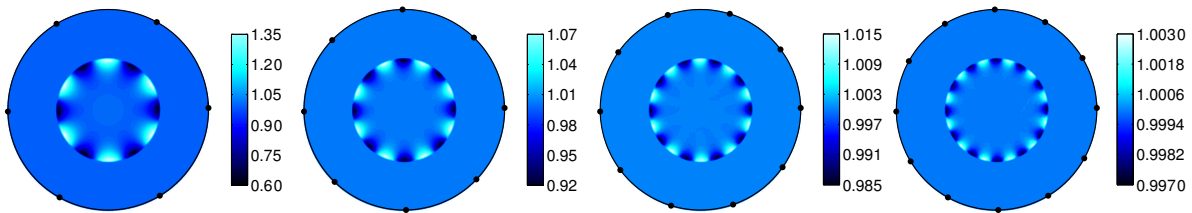


FIGURE 2 – Exemples de conductivité qui fournissent le même jeu de mesures que la conductivité de référence identiquement égale à un. Ces défauts de conductivité ne sont donc pas discernables. Sur ces images, les points noirs sur le bord du domaine matérialisent les électrodes. Pour ces quatre problèmes, on compte respectivement 6, 8, 10 et 12 électrodes. Lorsque le nombre d’électrodes augmente, on constate que l’amplitude du défaut de conductivité par rapport à la conductivité de référence égale à un tend vers zéro.

E. Comprendre les limitations des méthodes d’imagerie. Les objets que l’on ne peut discerner lorsqu’on dispose d’un ensemble fini de capteurs et d’émetteurs témoignent des limites des méthodes d’imagerie. Pour mettre en place les techniques de reconstruction, on a plutôt envie d’éviter ces inclusions invisibles. Les résultats des travaux précédents devraient permettre de mieux comprendre comment disposer les instruments de mesure. Ainsi, pour le problème d’acoustique en espace libre (voir la discussion de l’axe D), pour retrouver un défaut dans le milieu de référence nous apprenons qu’il est préférable de placer un capteur dans la direction d’incidence. Il sera intéressant de tester cet énoncé en pratique.

2.3 Planification de la thèse

Ce sujet de thèse mêle à la fois des questions théoriques, numériques et pratiques. La tâche A permettra à l’étudiant de s’appropriier les techniques de base. Les tâches B et C constituent

le cœur de la thèse et pourront être menées en parallèle, puis combinées. La tâche **D** est plus ouverte et soulèvera sans doute les questions les plus profondes. La tâche **E** amènera l'étudiant à découvrir différentes méthodes d'imagerie. Dans ce sujet de thèse, cet aspect est cependant moins central que les autres.

Références

- [1] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et S.A. NAZAROV : Non-scattering wavenumbers and far field invisibility for a finite set of incident/scattering directions. *Inverse Problems*, à paraître, hal preprint hal-01109534v1, 2015.
- [2] A.-S. BONNET-BEN DHIA, E. LUNÉVILLE, Y. MBEUTCHA et S.A. NAZAROV : A method to build non-scattering perturbations of acoustic waveguides. *Math. Method. Appl. Sci.*, à paraître, 2015.
- [3] A.-S. BONNET-BEN DHIA et S.A. NAZAROV : Obstacles in acoustic waveguides becoming “invisible” at given frequencies. *Acoust. Phys.*, 59(6):633–639, 2013.
- [4] A.-S. BONNET-BEN DHIA, S.A. NAZAROV et J. TASKINEN : Underwater topography invisible for surface waves at given frequencies. *Preprint*, hal-01114632, 2015.
- [5] L. CHESNEL, N. HYVÖNEN et S. STABOULIS : Construction of invisible conductivity perturbations for the point electrode model in electrical impedance tomography. *arXiv preprint arXiv :1412.6768v1*, 2014.