

# Résolution de problèmes de diffraction par équations intégrales

Eliane Bécache \*

27 septembre 2019

Version provisoire

---

\*Laboratoire POEMS (UMR CNRS/ENSTA/INRIA) ENSTA ParisTech, 828, Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Position du problème et rappels</b>	<b>3</b>
1.1	Le problème . . . . .	3
1.2	Quelques rappels préliminaires . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Caractère bien posé des problèmes aux limites</b>	<b>6</b>
2.1	Le théorème de Lax Milgram, version complexe . . . . .	6
2.2	Le problème de Neumann . . . . .	6
2.3	Le problème de Dirichlet . . . . .	8
<b>3</b>	<b>La solution fondamentale</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Formules de représentation intégrale</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Potentiels de simple et double couche</b>	<b>14</b>
5.1	Définitions des potentiels . . . . .	14
5.2	Traces des potentiels . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Quelques équations intégrales</b>	<b>18</b>
6.1	Problème de Dirichlet intérieur . . . . .	18
6.1.1	Équation intégrale avec les traces (dite naturelle) . . . . .	18
6.1.2	Approche avec un prolongement . . . . .	19
6.2	Problème de Neumann intérieur . . . . .	20
6.2.1	Problème de Neumann avec représentation en potentiel de double couche . . . . .	20
6.3	Conclusion . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Analyse mathématique d'une équation intégrale de première espèce</b>	<b>20</b>

# Introduction

Notre objectif est la résolution de problèmes de diffraction d'ondes par un obstacle, par une méthode d'équations intégrales. Il existe de nombreuses méthodes numériques pour résoudre ce type de problèmes (e.g. éléments finis, différences finies...) qui ont chacune leurs avantages et inconvénients et qui sont plus ou moins bien adaptées selon le problème considéré.

Les méthodes d'équations intégrales reposent sur la connaissance de la solution fondamentale, appelée aussi fonction de Green. De ce fait, elles sont bien adaptées à des problèmes posés en milieux homogènes, même s'il existe aussi des extensions à certains milieux hétérogènes pour lesquels on peut calculer la fonction de Green (par exemple des milieux stratifiés, périodiques...). Le principe de ces méthodes est de transformer le problème en un problème posé sur la frontière de l'obstacle. Du point de vue numérique, ceci peut être intéressant car ça fait gagner une dimension d'espace. Pour les problèmes de diffraction d'ondes, souvent posés en milieux non bornés, une des questions importantes est de savoir comment prendre en compte l'infini ou comment se ramener à un problème posé dans un domaine borné. Avec les méthodes volumiques, type éléments finis ou différences finies, on doit borner artificiellement le domaine de calcul et développer des stratégies pour que ces frontières artificielles perturbent le moins possible la solution (conditions aux limites absorbantes, couches absorbantes etc). Les méthodes d'équations intégrales sont naturellement posées sur un domaine borné (au moins si l'obstacle est borné), à savoir la frontière de l'obstacle, et le comportement à l'infini de la solution est pris en compte dans la fonction de Green.

Dans certains cas, il peut être intéressant de mixer plusieurs approches, par exemple couplage éléments finis- équations intégrales...

Dans ce cours nous nous restreindrons au cas des ondes acoustiques en régime harmonique. Cependant un certain nombre des résultats présentés s'étendent aisément à d'autres modèles (ondes élastiques, électromagnétiques...). Le lecteur désireux d'aller plus loin pourra par exemple consulter [4, 5, 6, 7].

## 1 Position du problème et rappels

### 1.1 Le problème

On considère un domaine ouvert très régulier  $\Omega_\ell \subset \mathbb{R}^3$  où  $\ell = i$  s'il s'agit d'un problème posé en domaine borné ( $i$  pour intérieur) et  $\ell = e$  s'il s'agit de l'extérieur d'un domaine borné. On notera le bord du domaine  $\Gamma = \partial\Omega_i$ . On veut résoudre le problème de Helmholtz 3D posé dans le domaine  $\Omega_\ell$  :

$$\begin{cases} \Delta u_\ell + \omega^2 u_\ell = 0 \text{ dans } \Omega_\ell \\ + \text{CL sur le bord, par exemple Neumann ou Dirichlet} \end{cases} \quad (1)$$

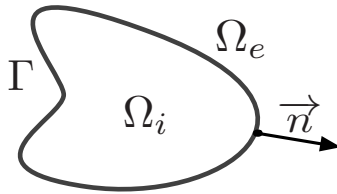


FIGURE 1 – Domaines intérieur et extérieur

On supposera pour simplifier qu'il y a de la dissipation :

$$\omega \in \mathbb{C}^+ := \{\omega \in \mathbb{C} \text{ t. q. } \omega_I := \Im(\omega) > 0\} \quad (2)$$

Cette hypothèse permet : (i) pour le problème extérieur, d'avoir assez de décroissance à l'infini pour pouvoir travailler dans l'espace  $H^1(\Omega_e)$ , (ii) pour le problème intérieur, d'éviter la présence de fréquences irrégulières (fréquences propres du Laplacien).

Avant d'introduire la démarche pour établir des équations intégrales correspondant à ce type de problème aux limites, nous allons montrer le caractère bien posé de (1), ce qui nécessite d'abord de faire quelques rappels.

## 1.2 Quelques rappels préliminaires

Dans cette section, nous faisons quelques rappels d'analyse, nous renvoyons le lecteur, pour des rappels plus complets, par exemple au livre [1] ou au cours ENSTA de Sonia Fliss ANN01, ou pour aller encore plus loin au livre de Treves [8]. On désigne par  $\Omega$  un domaine (borné ou non) de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière très régulière  $\Gamma$ . On notera  $\vec{n}$  sa normale extérieure.

**Notations.** La norme associée à un espace de Sobolev sur un domaine  $D$ ,  $H^s(D)$ , sera notée de deux façons :  $\|\cdot\|_{H^s(D)} = \|\cdot\|_{s,D}$ . De même sur  $L^2(D)$ , on notera  $\|\cdot\|_{L^2(D)} = \|\cdot\|_{0,D}$ .

**Premier théorème de trace.** L'application

$$\gamma_0 : C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma)$$

$$v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\Gamma}$$

se prolonge de façon unique, par continuité, en une application  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$  et  $\exists C_0 > 0$  telle que

$$\|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3)$$

Cette application n'est toutefois pas surjective de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma)$ . Par contre, elle est surjective de  $H^1(\Omega)$  dans  $\text{Im}\gamma_0 \subset L^2(\Gamma)$ , ensemble qu'on note aussi :

$$\text{Im}\gamma_0 := H^{1/2}(\Gamma) = \{\psi \in L^2(\Gamma), \quad t.q. \quad \exists v \in H^1(\Omega), \psi = \gamma_0 v\} \quad (4)$$

L'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$  est un espace de Banach, qu'on peut munir de la norme

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{v \in H^1(\Omega) \quad t.q. \quad \gamma_0 v = \psi} \|v\|_{1,\Omega} \quad (5)$$

**Propriété :**  $H^{1/2}(\Gamma)$  est dense dans  $L^2(\Gamma)$ .

On peut en fait montrer que l'application trace  $\gamma_0$  se prolonge de façon unique en une application continue et surjective  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  et  $\exists \tilde{C}_0 > 0$  telle que

$$\|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \tilde{C}_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (6)$$

Par définition de l'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$ , si  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ , alors il existe (au moins) un élément  $v \in H^1(\Omega)$  tel que  $\gamma_0 v = \psi$  : cet élément est appelé un *relèvement* de  $\psi$  dans  $H^1(\Omega)$ . Ce relèvement n'est pas unique. Nous admettrons le lemme de relèvement suivant :

**Lemme 1.** *Il existe un relèvement continu, i.e. une application*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : H^{1/2}(\Gamma) &\longrightarrow H^1(\Omega) \\ \psi &\longrightarrow v = \mathcal{R}\psi \quad \text{telle que } \gamma_0 v = \psi \end{aligned}$$

et cette application est continue :

$$\exists C_{\mathcal{R}} > 0, \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \|\mathcal{R}\psi\|_{1,\Omega} \leq C_{\mathcal{R}} \|\psi\|_{1/2,\Gamma}$$

**Remarque 1.** *On peut montrer que l'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$  peut également être défini par*

$$H^{1/2}(\Gamma) = \left\{ \psi \in L^2(\Gamma), \quad t.q. \quad \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^{n+1}} d\gamma_x d\gamma_y < +\infty \right\}$$

où  $n$  représente la dimension de  $\Gamma$  (ici  $n = 2$ ) et on a dans ce cas

$$\|\psi\|_{1/2,\Gamma}^2 = \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^{n+1}} d\gamma_x d\gamma_y$$

**Deuxième théorème de trace : traces de la dérivée normale, espace  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .** L'application

$$\begin{aligned}\gamma_1 : C^1(\bar{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ v &\mapsto \gamma_1 v = \frac{\partial v}{\partial n_{/\Gamma}} = \nabla v_{/\Gamma} \cdot \vec{n}\end{aligned}$$

se prolonge de façon unique, par continuité, en une application  $\gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$  et  $\exists C_1 > 0$  telle que

$$\|\gamma_1 v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad (7)$$

À partir de ces définitions pour les traces, nous pouvons énoncer la **formule de Green** suivante :

$$\int_{\Omega} \Delta u \bar{v} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_{/\Gamma}} \bar{v}_{/\Gamma} \, d\gamma, \quad \forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega). \quad (8)$$

Peut-on définir la trace de la dérivée normale pour des fonctions moins régulières que  $H^2(\Omega)$  ? on ne peut pas prolonger  $\gamma_1$  à  $H^1(\Omega)$ . Mais on peut encore lui donner un sens pour  $u \in H^1(\Delta, \Omega)$  grâce à la formule de Green. En effet, dans un sens que nous expliciterons plus loin, pour  $u \in H^1(\Delta, \Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$  on peut toujours écrire

$$\ll \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_{/\Gamma}} \bar{v} \, d\gamma \gg = \int_{\Omega} \Delta u \bar{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega \quad (9)$$

Le terme de gauche n'est plus une nécessairement une intégrale, même si par abus de notation nous l'écrivons parfois de cette façon, car si  $u \in H^1(\Delta, \Omega)$  mais  $u \notin H^2(\Omega)$  on peut montrer que  $\frac{\partial u}{\partial n_{/\Gamma}}$  n'appartient pas à  $L^2(\Gamma)$  mais appartient à un espace plus grand, qui est le dual de  $H^{1/2}(\Gamma)$  :

$$\frac{\partial u}{\partial n_{/\Gamma}} \in H^{-1/2}(\Gamma) := (H^{1/2}(\Gamma))'$$

On a les inclusions :

$$H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$$

Rappelons que par définition du dual, tout élément  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  est une forme linéaire continue sur  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Elle est donc définie par dualité à partir de la connaissance de

$$\langle q, \phi \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma} = q(\phi), \quad \forall \phi \in H^{1/2}(\Gamma)$$

Par conséquent, on peut en effet définir  $\gamma_1 v$  par dualité à partir de (9), c'est à dire par :

$$\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma} = \int_{\Omega} \Delta u \bar{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (10)$$

Est-ce que cette identité suffit à bien définir  $\gamma_1 u$  par dualité comme un élément de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  ? oui, grâce au lemme de relèvement 1. En effet pour toute fonction  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$ , il existe  $v = \mathcal{R}\phi \in H^1(\Omega)$  tel que  $\gamma_0 v = \phi$ , et par conséquent :

$$\langle \gamma_1 u, \phi \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma} = \int_{\Omega} \Delta u \overline{\mathcal{R}\phi} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \overline{\mathcal{R}\phi} \, d\Omega, \quad \forall \phi \in H^{1/2}(\Gamma)$$

Par ailleurs on peut montrer (exercice) que cette définition est indépendante de l'application relèvement choisie et permet bien de définir  $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  de manière unique.

On rappelle que la norme du dual est définie par

$$\|q\|_{-1/2, \Gamma} = \sup_{\phi \in H^{1/2}(\Gamma), \phi \neq 0} \frac{|\langle q, \phi \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma}|}{\|\phi\|_{1/2, \Gamma}}, \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (11)$$

## 2 Caractère bien posé des problèmes aux limites

### 2.1 Le théorème de Lax Milgram, version complexe

Rappelons la version complexe du théorème de Lax Milgram que nous allons utiliser ici. Ce théorème permet d'étudier le caractère bien posé d'un problème variationnel de la forme :

$$\text{Trouver } u \in V, a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (12)$$

pour lequel nous faisons les hypothèses suivantes :

(H1)  $(V, \|\cdot\|_V)$  est un *espace de Hilbert complexe*

(H2)  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme :

(H2a) *sesquilinéaire* de  $V \times V$  dans  $\mathbb{C}$

$$\forall u, v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} a(\lambda u + v, w) &= \lambda a(u, w) + a(v, w) \\ a(u, \lambda w + v) &= \bar{\lambda} a(u, w) + a(u, v) \end{aligned}$$

(H2b) *continue* sur  $V \times V$  :  $\exists M_a > 0, \forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V$

(H2c) *coercive* sur  $V$  :  $\exists \alpha_a > 0, \forall v \in V, |a(v, v)| \geq \alpha_a \|v\|_V^2$

(H3)  $\ell(\cdot)$  est une forme :

(H3a) *antilinéaire* de  $V$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \ell(\lambda u + v) = \bar{\lambda} \ell(u) + \ell(v)$$

(H3b) *continue* sur  $V$  :  $\exists M_\ell > 0, \forall v \in V, |\ell(v)| \leq M_\ell \|v\|_V$

Le théorème s'énonce alors :

**Théorème 1.** *Sous les hypothèses (H1) à (H3), le problème (12) admet une unique solution  $u$  dans  $V$ . De plus cette solution dépend continument des données :*

$$\|u\|_V \leq \frac{M_\ell}{\alpha_a} \quad (13)$$

### 2.2 Le problème de Neumann

Ici  $\Omega$  désigne l'un des deux domaines  $\Omega_i$  ou  $\Omega_e$ ,  $\Gamma$  sa frontière supposée assez régulière et  $\vec{n}$  la normale unitaire extérieure. On s'intéresse au problème de Neumann : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (14)$$

où  $f$  est "assez régulière".

**Remarque 2.** *Notons que, si  $u$  est une solution  $H^1(\Omega)$ , alors l'équation volumique permet de déduire que  $u \in H^1(\Delta, \Omega)$  et d'après les rappels précédents, sa dérivée normale appartient à l'espace  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Par conséquent, on pourrait se contenter de demander à la donnée sur le bord  $f$  d'être dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  pour obtenir une solution  $H^1(\Delta, \Omega)$ . Cependant, pour simplifier nous supposons dans cette section que  $f$  est "assez régulière" pour que la solution  $u$  soit dans  $H^2(\Omega)$ . Plus précisément, "assez régulière" signifie ici au moins  $f \in H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ . Les lecteurs qui aimeraient en savoir plus sur les résultats de régularité peuvent consulter les travaux de Grisvard [2, 3].*

**Remarque 3.** *Il n'y aurait aucune difficulté supplémentaire à considérer le problème avec un terme source volumique  $F$*

$$\Delta u + \omega^2 u = F.$$

*Nous avons choisi de simplifier la présentation en prenant ce terme  $F = 0$ .*

**Formulation variationnelle du problème de Neumann.** Afin d'étudier le caractère bien posé de (14), écrivons sa formulation variationnelle. On multiplie par  $v \in H^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \Delta u \bar{v} \, d\Omega + \omega^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\Omega = 0$$

On utilise la formule de Green (8), appliquée à la solution  $u$  qu'on suppose être dans  $H^2(\Omega)$  et à la fonction test  $v \in H^1(\Omega)$ , ce qui donne :

$$- \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega + \omega^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{v} \, d\gamma = 0$$

et en tenant compte de la condition aux limites de Neumann, nous obtenons la formulation variationnelle du problème de Neumann : Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (15)$$

avec

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\Omega \\ \ell(v) = \int_{\Gamma} f \bar{v} \, d\gamma \end{cases} \quad (16)$$

Notre objectif est de montrer que ce problème est bien posé dans  $H^1(\Omega)$  or nous savons que ca sera le cas si nous pouvons appliquer le théorème de Lax Milgram. Reprenons les hypothèses (H1) à (H3) :

- (H1)  $V = H^1(\Omega)$  est bien un espace de Hilbert.
- (H2a) et (H3a))  $a(., .)$  est clairement sesquilinéaire et  $\ell(.)$  antilinéaire.
- (H2b) La continuité de  $a(., .)$  sur  $V \times V$  découle classiquement de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (u, v) \in V \times V, |a(u, v)| \leq M_a(\omega) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{où } M_a(\omega) = \max(1, |\omega|^2) \quad (17)$$

- (H3b) La continuité de  $\ell(.)$  découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliqué à  $L^2(\Gamma)$  (on a supposé que  $f \in L^2(\Gamma)$ ) et du premier théorème de trace

$$\forall v \in V, |\ell(v)| \leq M_\ell \|v\|_V \quad \text{où } M_\ell = C_0 \|f\|_{L^2(\Gamma)}$$

- (H2c) coercivité de  $a(., .)$ ?

Le seul point à examiner de plus près est la coercivité de la forme bilinéaire  $a$ . Nous avons :

$$a(v, v) = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \omega^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (18)$$

Pour  $\omega \in \mathbb{R}$ , il n'est pas immédiat de conclure, mais il est possible de montrer que la forme n'est pas coercive (voir aussi remarque ci dessous). C'est ici qu'intervient l'hypothèse de dissipation (2) que nous avons faite, à savoir le fait que nous considérons une fréquence  $\omega$  complexe à partie imaginaire strictement positive. En regardant l'expression (18) on peut se demander comment la dissipation peut aider pour la coercivité? La réponse vient de l'idée de changer légèrement la forme bilinéaire, comme nous le voyons dans le lemme suivant :

**Lemme 1.** Pour tout  $\omega \in \mathbb{C}^+$ , la forme bilinéaire  $a(., .)$  est coercive : il existe  $\alpha_a(\omega) > 0$  tel que

$$|a(v, v)| \geq \alpha_a(\omega) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (19)$$

*Démonstration.* L'idée est de considérer :

$$\begin{aligned} a(v, -i\omega v) &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \overline{\nabla(-i\omega v)} \, d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} v \overline{-i\omega v} \, d\Omega \\ &= i\bar{\omega} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - i\omega \int_{\Omega} |\omega v|^2 \, d\Omega \end{aligned}$$

En utilisant que  $i\omega = i\omega_R - \omega_I$  et  $i\bar{\omega} = i\omega_R + \omega_I$  on déduit :

$$\begin{aligned}\Re(a(v, -i\omega v)) &= \omega_I \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |\omega v|^2) d\Omega \\ &\geq \omega_I \min(1, |\omega|^2) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2\end{aligned}$$

or  $\Re(a(v, -i\omega v)) \leq |a(v, -i\omega v)| = |\omega| |a(v, v)|$ . Par conséquent nous obtenons la coercivité avec  $\alpha_a(\omega) = \frac{\omega_I \min(1, |\omega|^2)}{|\omega|}$ .  $\square$

On a maintenant tous les éléments qui assurent le caractère bien posé du problème :

**Théorème 2.** *On suppose que  $f \in L^2(\Gamma)$ . Alors le problème de Neumann (15) admet une solution unique  $u \in H^1(\Omega)$  pour laquelle il existe une constante  $C_N(\omega) > 0$  telle que :*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_N(\omega) \|f\|_{L^2(\Gamma)} \quad (20)$$

*Démonstration.* C'est une application directe du théorème de Lax-Milgram. L'estimation de continuité (13) donne ici

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_\ell}{\alpha_a(\omega)} = \frac{C_0}{\alpha_a(\omega)} \|f\|_{L^2(\Gamma)}$$

$\square$

**Remarque 4.** *On peut remarquer que, si  $\omega_I$  tend vers zéro, alors la constante de coercivité  $\alpha_a(\omega)$  tend également vers zéro, ce qui veut dire qu'on perd l'inégalité de coercivité. Ceci est cohérent avec le fait que, lorsque  $\omega \in \mathbb{R}$ , la forme  $a(\cdot, \cdot)$  n'est pas coercive dans  $H^1(\Omega)$  et on ne peut plus appliquer le théorème de Lax Milgram pour étudier le caractère bien posé du problème. Notons que ceci ne signifie pas que le problème est mal posé (Lax Milgram est seulement suffisant). Plus précisément :*

- (i) *pour le problème intérieur, il existe une infinité dénombrable de fréquences pour lesquelles le problème n'est pas bien posé dans  $H^1(\Omega_i)$  (les fréquences propres du problème du Laplacien avec conditions aux limites de Neumann). Pour les autres fréquences, on doit utiliser d'autres méthodes pour analyser le problème (e.g. alternative de Fredholm...)*
- (ii) *pour le problème extérieur, la difficulté ne vient pas de fréquences propres mais de ce qui se passe à l'infini. On doit rajouter une condition de rayonnement à l'infini*

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u \right| \leq \frac{C}{r^2}, \quad r = \|x\|$$

*et travailler dans un espace plus grand que  $H^1(\Omega_e)$ , de fonctions dont le comportement à l'infini est différent :*

$$W_0^1(\Omega_e) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega_e), (1+r^2)^{-1/2}v \in L^2(\Omega_e) \text{ et } \nabla v \in (L^2(\Omega_e))^3 \right\}$$

### 2.3 Le problème de Dirichlet

On s'intéresse maintenant au problème de Dirichlet : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = u_d \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (21)$$

On préfère se ramener à chercher une fonction nulle au bord pour travailler dans l'espace  $H_0^1(\Omega)$ . Si on suppose que  $u_d$  est la trace d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ , autrement dit que  $u_d \in \text{Im}\gamma_0 = H^{1/2}(\Gamma)$  alors le lemme de relèvement (Lemme 1) permet d'affirmer qu'on peut trouver  $U = \mathcal{R}u_d \in H^1(\Omega)$  qui vérifie

$$U|_{\Gamma} = u_d \quad (22)$$



et cette fonction vérifie l'estimation de continuité :

$$\|U\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{\mathcal{R}} \|u_d\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (23)$$

La nouvelle inconnue :

$$\tilde{u} = u - U \quad (24)$$

satisfait alors un problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} + \omega^2 \tilde{u} = -\Delta U - \omega^2 U \text{ dans } \Omega \\ \tilde{u} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (25)$$

**Formulation variationnelle du problème de Dirichlet homogène.** Afin d'étudier le caractère bien posé de (25), nous procédons, comme pour le problème de Neumann, en passant par la formulation variationnelle. L'espace fonctionnel de travail est ici l'espace  $H_0^1(\Omega)$  qui prend en compte la condition aux limites de Dirichlet homogène. Nous pourrions multiplier l'équation volumique par une fonction test  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Procédons un peu différemment, en passant par les distributions. Si nous partons d'une fonction  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , nous avons, au sens des distributions (le crochet est le crochet de dualité  $\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)$ )

$$\langle \Delta \tilde{u} + \omega^2 \tilde{u}, v \rangle = \langle -\Delta U - \omega^2 U, v \rangle$$

ce qui implique (dérivées au sens des distributions) :

$$\langle \nabla \tilde{u}, \nabla v \rangle - \omega^2 \langle \tilde{u}, v \rangle = - \langle \nabla U, \nabla v \rangle + \omega^2 \langle U, v \rangle$$

En utilisant la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  on obtient finalement la formulation variationnelle du problème de Dirichlet : Trouver  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$a(\tilde{u}, v) = \tilde{\ell}(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (26)$$

où la forme sesquilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est la même que pour le problème de Neumann, et est définie par (16) et avec

$$\tilde{\ell}(v) = -a(U, v) \quad (27)$$

Par les mêmes arguments que pour le problème de Neumann, nous pouvons appliquer le théorème de Lax-Milgram et obtenir :

**Théorème 3.** *On suppose que  $u_d \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Alors le problème de Dirichlet (26) admet une solution unique  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  pour laquelle il existe une constante  $C_D(\omega) > 0$  telle que :*

$$\|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_D(\omega) \|u_d\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad (28)$$

*Démonstration.* Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les autres hypothèses du théorème de Lax-Milgram et nous contentons de vérifier celles portant sur les deux formes. La forme sesquilinéaire est identique dans les deux cas, Neumann ou Dirichlet, or elle était coercive sur  $H^1(\Omega)$ , dès que  $\omega_I > 0$ , elle reste donc bien sûr toujours coercive sur  $H_0^1(\Omega)$ , idem pour la continuité. La continuité de la forme antilinéaire  $\tilde{\ell}$  découle aisément de celle de la forme  $a(\cdot, \cdot)$  :

$$|\tilde{\ell}(v)| = |a(U, v)| \leq M_a(\omega) \|U\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

où  $M_a(\omega) = \max(1, |\omega|^2)$  et d'après l'estimation de continuité (23)

$$|\tilde{\ell}(v)| = |a(U, v)| \leq M_a(\omega) C_{\mathcal{R}} \|u_d\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

On peut donc appliquer Lax-Milgram et en déduire une estimation de continuité de la solution

$$\|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_{\mathcal{R}} M_a(\omega)}{\alpha_a(\omega)} \|u_d\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

ce qui donne bien (28) avec  $C(\omega) = \frac{C_{\mathcal{R}} |\omega| \max(1, |\omega|^2)}{\omega_I \min(1, |\omega|^2)}$ .

□

### 3 La solution fondamentale

On appelle solution fondamentale ou solution élémentaire ou fonction de Green du problème de Helmholtz, la solution provenant d'une source ponctuelle, par exemple située à l'origine, i.e. vérifiant

$$\Delta G + \omega^2 G = -\delta_O \text{ dans } \mathbb{R}^3 \quad (29)$$

où  $\delta_O = \delta$  est la distribution Dirac à l'origine. Cette équation est à prendre au sens des distributions dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , c'est à dire, pour tout  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  :

$$\langle \Delta G + \omega^2 G, v \rangle = - \langle \delta, v \rangle = -v(0)$$

Ceci ne suffit cependant pas à la déterminer complètement, il peut y avoir plusieurs distributions solutions de cette équation. C'est souvent le comportement à l'infini qui permet d'obtenir l'unicité. Nous chercherons ici la solution  $G$  dans  $L^1(\mathbb{R}^3)$ .

**Lemme 2.** *L'unique solution fondamentale  $G \in L^1(\mathbb{R}^3)$  a pour expression :*

$$G(x) = \frac{1}{4\pi r} e^{i\omega r} \text{ avec } r = |x| \quad (30)$$

*Démonstration.* Il existe plusieurs méthodes pour la calculer (rappelons pour les élèves qui l'ont suivi que ce calcul a été fait dans le cours MA102 pour le Laplacien).

**Première méthode.** Par Fourier. En utilisant que  $\widehat{\delta} = 1$ , nous obtenons

$$(-|\xi|^2 + \omega^2)\widehat{G} = -1 \Rightarrow \widehat{G} = \frac{-1}{\omega^2 - |\xi|^2}$$

Comme on a supposé ici que  $\omega_I > 0$ , le dénominateur ne s'annule jamais,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ . Il "suffit" ensuite calculer la transformée de Fourier inverse :

$$G(x) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left( \frac{-1}{\omega^2 - |\xi|^2} \right)$$

**Deuxième méthode.** C'est celle que nous adoptons ici. Étant donnée la symétrie sphérique de l'équation satisfaite par  $G$ , nous pouvons la chercher sous forme radiale  $G(x) = G(r)$ . L'équation de Helmholtz se réécrit en radiale :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) + \omega^2 G = \delta$$

Dès que  $r \geq \varepsilon > 0$ ,  $G$  vérifie donc l'équation homogène. Posons alors

$$z = \omega r, \quad G(r) = \frac{u(z)}{z}$$

il est facile de montrer qu'on obtient alors l'équation différentielle ordinaire du second ordre suivante en  $u(z)$  :

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + u(z) = 0$$

dont les solutions sont  $e^{\pm iz}$ . Par conséquent, la solution fondamentale est de la forme :

$$G(r) = A \frac{e^{i\omega r}}{r} + B \frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

Compte tenu du fait que  $\omega \in \mathbb{C}^+$ , nous constatons que le second terme croît exponentiellement à l'infini. Pour obtenir une solution dans  $L^1(\mathbb{R}^3)$ , nous devons nécessairement avoir  $B = 0$ . Il reste donc

$$G(r) = A \frac{e^{i\omega r}}{r} \quad (31)$$

Avant de déterminer la constante  $A$ , vérifions que cette fonction est bien dans  $L^1(\mathbb{R}^3)$ . À l'infini, elle est exponentiellement décroissante et donc intégrable. Au voisinage de  $r = 0$  il y a une singularité en  $1/r$  mais l'élément d'intégration volumique étant en  $r^2$ , cette singularité disparaît. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |G(x)| dx &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \frac{A}{r} e^{-\omega r} r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi A \int_{r=0}^{+\infty} e^{-\omega r} r dr < \infty \end{aligned}$$

**Détermination de la constante :** Rappelons que par définition de  $G$ , pour tout  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  :

$$(i) \quad \langle \Delta G + \omega^2 G, v \rangle = - \langle \delta, v \rangle = -v(0)$$

Or ce crochet peut également s'écrire, en particulier pour toute fonction test  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  radiale :

$$\begin{aligned} \langle \Delta G + \omega^2 G, v \rangle &= \langle G, \Delta v + \omega^2 v \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} G(x) (\Delta v + \omega^2 v)(x) dx \quad (G \in L^1(\mathbb{R}^3)) \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{+\infty} G(r) \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dv(r)}{dr} \right) + \omega^2 v(r) \right) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi \int_{r=0}^{+\infty} G(r) \left( \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dv(r)}{dr} \right) + \omega^2 r^2 v(r) \right) dr \\ (IPP) \quad &= 4\pi \int_0^{+\infty} \omega^2 r^2 G(r) v(r) dr - 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{dG(r)}{dr} r^2 \frac{dv(r)}{dr} dr + 4\pi \underbrace{\left[ G(r) r^2 \frac{dv(r)}{dr} \right]_0^{+\infty}}_{=0} \\ &= \underbrace{4\pi \int_0^{+\infty} \left( \omega^2 r^2 G(r) + \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG(r)}{dr} \right) \right) v(r) dr}_{=0} - 4\pi \left[ r^2 \frac{dG(r)}{dr} v(r) \right]_0^{+\infty} \\ (IPP) \quad &= -4\pi \left[ r^2 A \left( \frac{i\omega}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{i\omega r} v(r) \right]_0^{+\infty} = -4\pi A v(0) \end{aligned}$$

En identifiant cette expression avec (i) on en déduit que

$$-4\pi A = -1 \implies A = \frac{1}{4\pi}$$

ce qui donne le résultat (30) annoncé.  $\square$

**Remarque 5.** Rappelons qu'on a supposé ici que  $\omega \in \mathbb{C}^+$ . La partie imaginaire de  $\omega$  correspond à de la dissipation et on le voit sur le comportement décroissant à l'infini de la solution fondamentale, qui est dans  $L^1(\mathbb{R}^3)$  (et même en fait encore plus décroissante). Dans le cas où la fréquence est réelle, c'est la condition de radiation à l'infini qui permet de déterminer la solution fondamentale de façon unique.

## 4 Formules de représentation intégrale

On s'intéresse toujours à un problème de diffraction dans  $\Omega_1$ . Ici  $\Omega_1$  pourra représenter soit  $\Omega_i$  (domaine intérieur) soit  $\Omega_e$  (domaine extérieur) et on notera  $\Omega_2 = \overline{\Omega_1^c}$ . La solution  $u \in H^1(\Omega_1)$  qui nous intéresse vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_1 \tag{32}$$

Il existe plusieurs façons d'obtenir une représentation intégrale de la solution en fonction de ses traces.

- Par les distributions. C'est une méthode très élégante, mais qui demande de manipuler des produits de convolution de distributions...
- Méthode "directe". Nous allons faire ce choix là et la présenter "formellement" c'est à dire admettre que tout ce qu'on écrit a bien un sens! Pour cela nous allons en particulier supposer que  $u$  est "très régulière".

**Remarque 6.** Pour faire les choses rigoureusement, nous pourrions nous contenter d'utiliser que  $u \in H^1(\Delta; \Omega_1)$ , utiliser les crochets de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$  au lieu d'écrire des intégrales sur  $\Gamma$  et tout justifier rigoureusement.

**Notations.** Pour fixer les idées, supposons ici que  $\Omega_1 = \Omega_i$ , donc  $\Omega_2 = \Omega_e$ . Pour une fonction  $f$  définie dans  $\mathbb{R}^3$ , nous noterons  $f^i$  sa trace intérieure (i.e. du côté  $\Omega_i$ ),  $f^e$  sa trace extérieure,  $\vec{n}$  la normale extérieure à  $\Omega_i$  (i.e. orientée de  $\Omega_i$  vers  $\Omega_e$ )

$$[f]_\Gamma = f^i - f^e$$

On introduit la fonction de Green issue du point  $x$ , i.e.

$$\Delta G + \omega^2 G = -\delta_x \text{ ou encore } \Delta G(y, x) + \omega^2 G(y, x) = -\delta_x(y) \quad (33)$$

D'après les résultats précédents :

$$G(y, x) = G(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{i\omega r} \text{ avec } r = |x - y| \quad (34)$$

On peut remarquer que  $G(y, x)$  ne dépend que de la distance entre  $x$  et  $y$ ,

$$G(y, x) = G(x, y) = G(x - y)$$

Nous avons le :

**Théorème 4.** (Théorème de représentation).

(a) Si  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz (32) dans l'ouvert  $\Omega_i$  alors on a la représentation intégrale suivante :

$$\int_\Gamma \left( G(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i (y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u^i(y) \right) d\gamma_y = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_e \end{cases} \quad (35)$$

(b) Si  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz (32) dans l'ouvert  $\Omega_e$ , on a bien sûr la formule de représentation intégrale analogue dans  $\Omega_e$  (Z! on conserve la normale orientée de  $\Omega_i$  vers  $\Omega_e$ ) :

$$\int_\Gamma \left( -G(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^e (y) + \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u^e(y) \right) d\gamma_y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega_i \\ u(x) & \text{si } x \in \Omega_e \end{cases} \quad (36)$$

(c) Si  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz (32) dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$ , en regroupant les deux formules de représentation, on a :

$$\forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e, u(x) = \int_\Gamma \left( G(x, y) \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma (y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) [u]_\Gamma(y) \right) d\gamma_y \quad (37)$$

*Démonstration.* (a) On suppose que  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_i$ . Par ailleurs, la solution fondamentale vérifie (33). L'idée est d'appliquer la formule de Green :

$$\int_\Omega (\Delta w + \omega^2 w) v d\Omega = - \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v d\Omega + \omega^2 \int_\Omega w v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} v d\gamma \quad (38)$$

On aurait envie d'appliquer cette formule de Green pour  $w = u$ ,  $v = G(x, \cdot)$  puis  $w = G(\cdot, x)$ ,  $v = u$ ... Rigoureusement on ne peut pas le faire, car on serait amené à écrire "  $\int_\Omega (\Delta G(x, \cdot) + \omega^2 G(x, \cdot)) v d\Omega = \int_\Omega \delta_x v d\Omega$ " qui n'a pas de sens puisque  $\delta_x \notin L^2$ . L'idée est alors de l'écrire là où on a le droit de le faire, c'est à dire en

dehors de la singularité de  $G$  qui se trouve en  $y = x$ . Par définition, la fonction de Green vérifie, pour tout  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \Delta G(x, \cdot) + \omega^2 G(x, \cdot), v \rangle = -v(x)$$

Ceci implique en particulier que pour tout ouvert  $D_x$  ne contenant pas  $x$ , pour tout  $v \in \mathcal{D}(D_x)$

$$\langle \Delta G(x, \cdot) + \omega^2 G(x, \cdot), v \rangle = 0$$

ce qui montre que

$$\Delta G(x, \cdot) + \omega^2 G(x, \cdot) = 0 \quad \text{dans } D_x$$

On distingue deux cas :

— **Premier cas**  $x \in \Omega^e$ . En se plaçant dans le domaine  $D_x = \Omega_i$ , ne contenant pas  $x$ , on a :

$$\Delta G(x, y) + \omega^2 G(x, y) = 0 \quad \forall y \in \Omega_i$$

On peut donc écrire (38) pour  $\Omega = \Omega_i$  et  $u$  et  $G$ , c'est à dire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \underbrace{(\Delta u + \omega^2 u)(y)}_{=0} G(x, y) d\Omega_y &= - \int_{\Omega_i} \nabla u(y) \cdot \nabla_y G(x, y) d\Omega_y + \omega^2 \int_{\Omega} u(y) G(x, y) d\Omega_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(y)^i G(x, y) d\gamma_y \\ \int_{\Omega_i} \underbrace{(\Delta G + \omega^2 G)(x, y)}_{=0} u(y) d\Omega_y &= - \int_{\Omega_i} \nabla u(y) \cdot \nabla_y G(x, y) d\Omega_y + \omega^2 \int_{\Omega} u(y) G(x, y) d\Omega_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u^i(y) d\gamma_y \end{aligned}$$

En faisant la différence entre les deux :

$$0 = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u^i(y) - G(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i(y) \right) d\gamma_y, \quad x \in \Omega_e$$

— **Deuxième cas**  $x \in \Omega^i$ . On peut enlever la singularité en  $y = x$  en retirant une boule de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$ ,  $B_\varepsilon(x)$  strictement incluse dans  $\Omega_i$ . Dans ce cas on peut procéder comme précédemment dans le domaine  $D_x^\varepsilon := \Omega_i \setminus B_\varepsilon(x)$ .

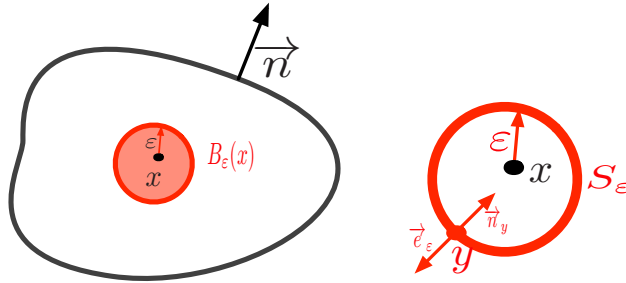


FIGURE 2 – Domaine privé de la boule  $B_\varepsilon(x)$

Ce qui va changer c'est qu'il y a maintenant deux termes de bord : sur  $\Gamma$  et sur le bord de la boule  $B_\varepsilon(x)$  que nous noterons  $S_\varepsilon := \partial B_\varepsilon(x)$  :

$$0 = \int_{\partial(D_x^\varepsilon)} \left( \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u(y) - G(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)(y) \right) d\gamma_y,$$

où  $n$  est toujours la normale extérieure à  $D_x^\varepsilon$ . On obtient donc :

$$0 = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u^i(y) - G(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i(y) \right) d\gamma_y + \int_{S_\varepsilon} \left( \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u(y) - G(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)(y) \right) d\gamma_y$$

Pour  $y \in S_\varepsilon$ , on a  $|y - x| = \varepsilon$ , la normale est entrante dans la boule et est donc opposée au vecteur unitaire normal sortant :

$$-\vec{n}_y = \vec{e}_\varepsilon = \frac{y - x}{|y - x|}$$

et on a :

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} e^{i\omega\varepsilon}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) = \nabla_y G(x, y) \cdot (-\vec{e}_\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} - i\omega \right) e^{i\omega\varepsilon} \nabla_y \varepsilon \cdot (-\vec{e}_\varepsilon)$$

or

$$\varepsilon^2 = |y - x|^2 = \sum_j (y_j - x_j)^2 \implies 2\varepsilon \partial_i \varepsilon = 2(y_i - x_i) \implies \nabla_y \varepsilon = \frac{y - x}{|y - x|} = \vec{e}_\varepsilon$$

donc

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} - i\omega \right) e^{i\omega\varepsilon}$$

Nous allons montrer que

$$(i) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u(y) d\gamma_y = u(x)$$

$$(ii) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\gamma_y = 0$$

(i) Nous utilisons d'abord le fait qu'en dehors de  $\Gamma$ , la solution  $u$  est très régulière (elle est même  $C^\infty(D)$  pour tout domaine  $D$  ne touchant pas  $\Gamma$ ). Par conséquent pour  $y \in S_\varepsilon$ , on a en particulier

$$u(y) = u(x) + O(\varepsilon)$$

Par conséquent

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u(y) d\gamma_y = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} - i\omega \right) e^{i\omega\varepsilon} (u(x) + O(\varepsilon)) \varepsilon^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi} u(x) e^{i\omega\varepsilon} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi + O(\varepsilon) \longrightarrow u(x)$$

(ii) De nouveau nous utilisons que  $u$  est très régulière sur  $B_\varepsilon(x)$  :

$$\left| \int_{S_\varepsilon} G(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)(y) d\gamma_y \right| = \left| \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon} e^{i\omega\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \varepsilon^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \right|$$

$$\leq \varepsilon \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right| \sin \varphi d\theta d\varphi \leq C\varepsilon \|\nabla u\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

On en déduit bien la formule de représentation (a). Les points (b) et (c) en découlent aisément.  $\square$

## 5 Potentiels de simple et double couche

### 5.1 Définitions des potentiels

Dans les formules de représentation intégrales précédentes, nous avons vu apparaître des potentiels que nous définissons maintenant.

**Potentiel de simple couche.** Pour une fonction  $q$  définie sur le bord  $\Gamma$ , assez régulière (par exemple  $q \in C^0(\Gamma)$ )

$$\mathcal{S}q(x) = \int_{\Gamma} G(x - y) q(y) d\gamma_y, \quad \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e \quad (39)$$

**Potentiel de double couche.** Pour une fonction  $\varphi$  définie sur le bord  $\Gamma$ , assez régulière (par exemple  $\varphi \in C^0(\Gamma)$ )

$$\mathcal{D}\varphi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x-y)\varphi(y)d\gamma_y, \quad \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e \quad (40)$$

Les formules de représentation intégrale peuvent alors se réécrire à l'aide de ces potentiels. Si  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$ , alors,

$$(a) \quad \mathcal{S} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i(x) - \mathcal{D}u^i(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_e \end{cases} \quad (41)$$

$$(b) \quad -\mathcal{S} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^e(x) + \mathcal{D}u^e(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega_i \\ u(x) & \text{si } x \in \Omega_e \end{cases} \quad (42)$$

$$(c) \quad \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e, u(x) = \mathcal{S} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma}(x) - \mathcal{D}[u]_{\Gamma}(x) \quad (43)$$

où  $n$  est toujours la normale orientée de  $\Omega_i$  vers  $\Omega_e$ .

**Remarque 7.** Nous avons vu que si  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$  alors elle peut se représenter à l'aide de potentiels de simple et double couche. Réciproquement, si on se donne une fonction  $q$  ou  $\varphi$ , alors, on peut vérifier que les potentiels de simple  $\mathcal{S}q$  et double couche  $\mathcal{D}\varphi$  sont des solutions de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$ .

Notre objectif est maintenant de reformuler le problème aux limites qu'on cherche à résoudre, à l'aide d'une équation intégrale. Les formules de représentation de la solution vérifient l'équation volumique. Nous n'avons pas encore tenu compte des conditions aux limites sur le bord. Pour ce faire, nous avons besoin des traces de ces potentiels.

## 5.2 Traces des potentiels

Les potentiels de simple et double couche sont définis dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$ . La question est de savoir ce qui se passe si le point  $x$  se trouve sur la surface  $\Gamma$ ? En d'autres termes, il s'agit de voir comment sont définies les traces des opérateurs de simple et double couche. C'est une question qui n'est pas du tout évidente car les noyaux de ces opérateurs deviennent alors singuliers. Prenons par exemple le potentiel de simple couche. La définition de la fonction de Green (34) montre que le comportement de cette fonction est en  $1/|x-y|$  lorsque  $y$  est proche de  $x$ . Il faut donc voir comment est définie la limite de  $\mathcal{S}q(x_\varepsilon)$  lorsqu'un point  $x_\varepsilon \in \Omega_i \cup \Omega_e$  tend vers  $x \in \Gamma$ . Pour une fonction  $V(x)$  définie dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$ , nous pouvons définir les traces intérieures et extérieures de la façon suivante ( $\vec{n}$  est la normale orientée de  $\Omega_i$  vers  $\Omega_e$ ) (nous supposons  $\varepsilon > 0$ ) :

$$V^i(x) = \lim_{\substack{x_\varepsilon = x - \varepsilon n_x \in \Omega_i \\ x_\varepsilon \rightarrow x \in \Gamma (\varepsilon \rightarrow 0^+)}} V(x_\varepsilon) \quad \text{et} \quad V^e(x) = \lim_{\substack{x_\varepsilon = x + \varepsilon n_x \in \Omega_e \\ x_\varepsilon \rightarrow x \in \Gamma (\varepsilon \rightarrow 0^+)}} V(x_\varepsilon).$$

Dans le théorème qui suit, nous donnons les différentes traces du potentiel de simple couche.

**Théorème 5.** (Traces du potentiel de simple couche). Pour une fonction  $q$  définie sur le bord  $\Gamma$ , assez régulière, nous avons :

(i) Le potentiel de simple couche est continu à la traversée de  $\Gamma$  et possède les traces suivantes :

$$(\mathcal{S}q)^i(x) = (\mathcal{S}q)^e(x) = \int_{\Gamma} G(x-y)q(y)d\gamma_y := Sq(x), \quad \forall x \in \Gamma \quad (44)$$

(ii) La dérivée normale du potentiel de simple couche est discontinue à la traversée de  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial n_x}(\mathcal{S}q) \right)^i(x) &= \frac{1}{2}q(x) + D'q(x), \quad \forall x \in \Gamma \\ \left( \frac{\partial}{\partial n_x}(\mathcal{S}q) \right)^e(x) &= -\frac{1}{2}q(x) + D'q(x), \quad \forall x \in \Gamma \end{aligned} \quad (45)$$

avec

$$D'q(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y)q(y)d\gamma_y, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (46)$$

*Démonstration.* (i) Considérons un point  $x_\varepsilon = x + \varepsilon n_x \in \Omega_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Nous rappelons que

$$\mathcal{S}q(x_\varepsilon) = \int_{\Gamma} G(x_\varepsilon, y)q(y)d\gamma_y = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi|x_\varepsilon - y|} e^{i\omega|x_\varepsilon - y|} q(y)d\gamma_y.$$

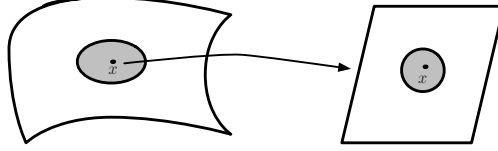


FIGURE 3 – Intégration localement sur le plan tangent

Si  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $G(x_\varepsilon, y)q(y) \rightarrow G(x, y)q(y)$  qui a une singularité en  $1/r$  ( $r = |x - y|$ ), appelée singularité faible. Montrons que cette singularité est intégrable. Nous supposons que  $\Gamma$  est très régulière. En particulier elle admet un plan tangent en tout point. Lorsque  $x \in \Gamma$  et  $y \in \Gamma_x$  un voisinage de  $x$  sur  $\Gamma$ , on peut approcher localement l'intégrale sur  $\Gamma_x$  par l'intégrale de  $x$  sur un petit disque autour de  $x$  sur le plan tangent (voir figure 5.2). La singularité se comporte donc comme pour l'intégrale

$$\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi r} e^{i\omega r} q(re^{i\theta}) r dr d\theta.$$

Le terme singulier en  $1/r$  est donc compensé par l'élément de surface et il ne reste finalement que des termes bornés à intégrer. Autrement dit, la singularité disparaît et  $G(x, y)q(y)$  est bien intégrable. Pour appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgues et pouvoir entrer la limite dans l'intégrale :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}q(x_\varepsilon) = \int_{\Gamma} G(x, y)q(y)d\gamma_y,$$

il reste à trouver une fonction  $f \in L^1$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) telle que

$$|G(x_\varepsilon, y)q(y)| \leq f.$$

Pour simplifier, nous allons nous placer dans le cas où  $\Gamma$  est une surface plane dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans le cas plan, étant donné que pour tout  $y \in \Gamma$ ,  $y - x$  est orthogonal à  $x_\varepsilon - x$ , nous avons aussitôt  $|x_\varepsilon - y| \geq |x - y|$  et par conséquent

$$|G(x_\varepsilon, y)| \leq |G(x, y)| \in L^1.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure. La preuve dans le cas général est un peu plus technique, elle nécessite d'introduire une paramétrisation de  $\Gamma$ , d'utiliser le plan tangent, et il est moins immédiat de déterminer la fonction  $f \in L^1$  (voir par exemple [4])

(ii) Examinons la dérivée normale du potentiel de simple couche :

$$\nabla_{x_\varepsilon} \int_{\Gamma} G(x_\varepsilon, y)q(y)d\gamma_y \cdot \vec{n}_x$$

Si on pouvait appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on passerait à la limite à l'intérieur de l'intégrale et on obtiendrait :

$$D'q(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y)q(y)d\gamma_y.$$



Est-ce que cette intégrale a un sens ? Nous avons vu précédemment que le gradient comporte un terme en  $1/|x-y|^2$  qui est singulier et a priori ce terme n'est pas intégrable contrairement au terme  $1/|x-y|$ . Plus précisément, nous avons

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} \left( \frac{1}{|x-y|} - i\omega \right) e^{i\omega|x-y|} \frac{(x-y, \vec{n}_x)}{|x-y|}$$

Nous pouvons montrer cependant (admis ici) que, si la frontière  $\Gamma$  est très régulière (si elle admet un plan tangent en tout point), alors

$$\frac{(x-y, \vec{n}_x)}{|x-y|} = O(|x-y|)$$

Par conséquent la singularité est en fait en  $1/|x-y|$  donc intégrable. Par contre, nous ne pouvons pas trouver une fonction  $f \in L^1$  indépendante de  $\varepsilon$  qui majore  $\nabla_{x_\varepsilon} G(x_\varepsilon, y) \cdot \vec{n}_x q(y)$  donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue ne s'applique pas. La preuve pour obtenir (ii) est assez technique et nous ne la présentons pas ici (voir par exemple [4]).  $\square$

**Remarque 8.** Nous avons vu, dans la démonstration du théorème 5 que l'opérateur  $D'$  était bien défini au sens d'une intégrale classique car le noyau  $\frac{\partial G}{\partial n_y}$  est seulement faiblement singulier (en  $1/r$ ) grâce à la présence du terme  $(x-y, \vec{n}_x)$  qui fait gagner un ordre de singularité. Cette situation est spécifique au cas acoustique. En élasticité par exemple, le terme  $(x-y, \vec{n}_x)$  n'est plus en facteur et le noyau devient alors singulier (en  $1/r^2$ ) et a priori non intégrable. Il est cependant encore possible de donner un sens à l'intégrale (le noyau possédant d'autres propriétés que nous ne spécifierons pas ici), qui est alors à prendre au sens de la valeur principale de Cauchy

$$v.p. \int_{\Gamma} f(x, y) d\gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \{|x-y| \leq \varepsilon\}} f(x, y) d\gamma_y$$

Nous admettons le théorème suivant, qui spécifie les traces du potentiel de double couche.

**Théorème 6.** (Traces du potentiel de double couche) Pour une fonction  $\varphi$  définie sur le bord  $\Gamma$ , assez régulière, nous avons :

(i) Le potentiel de double couche est discontinu à la traversée de  $\Gamma$  et possède les traces suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}\varphi)^i(x) &= -\frac{1}{2}\varphi(x) + D\varphi(x), \quad \forall x \in \Gamma \\ (\mathcal{D}\varphi)^e(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + D\varphi(x), \quad \forall x \in \Gamma \end{aligned} \tag{47}$$

avec

$$D\varphi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \varphi(y) d\gamma_y, \quad \forall x \in \Gamma \tag{48}$$

(ii) La dérivée normale du potentiel de double couche est continue à la traversée de  $\Gamma$  :

$$\left( \frac{\partial}{\partial n_x} (\mathcal{D}\varphi) \right)^i(x) = \left( \frac{\partial}{\partial n_x} (\mathcal{D}\varphi) \right)^e(x) := N\varphi(x), \quad \forall x \in \Gamma \tag{49}$$

**Remarque 9.** Les opérateurs  $D$  et  $D'$  sont adjoints l'un de l'autre et ont la même singularité (faible dans le cas acoustique, cf remarque 8). En ce qui concerne l'opérateur  $N$  :

$$N\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla_{x_\varepsilon} \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x_\varepsilon, y) \varphi(y) d\gamma_y \cdot \vec{n}_x$$

on ne peut pas l'écrire sous la forme

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(x, y) \varphi(y) d\gamma_y$$

car le noyau devient hypersingulier (en  $1/r^3$ ) et l'intégrale n'a plus de sens même en tant que valeur principale de Cauchy. On peut en particulier vérifier que même en acoustique, le "miracle" qui rend le noyau  $\frac{\partial G}{\partial n_y}$  seulement faiblement singulier grâce au terme  $(x-y, \vec{n}_x)$  ne se produit plus pour la dérivée seconde  $\frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(x, y)$ , car il reste un terme en  $(\vec{n}_x, \vec{n}_y)/|x-y|^3$ .

**Remarque 10.** — Nous avons considéré ici le cas 3D (où  $\Gamma$  est une surface, de dimension 2) et les noyaux rencontrés pour les problèmes classiques (acoustique, élasticité etc...) sont : (i) faiblement singuliers (en  $1/r$ ), (ii) singuliers (en  $1/r^2$ ) et (iii) hypersinguliers (en  $1/r^3$ ).

— Dans le cas 2D, les singularités des noyaux sont les suivantes : (i) faiblement singuliers en  $\log r$  (donc intégrables sur une courbe, de dimension 1), (ii) singuliers en  $1/r$  et (iii) hypersinguliers en  $1/r^2$ .

**Exercice 1.** Montrer les équivalences suivantes (on supposera que toutes les fonctions sont très régulières) :

1. Pour le potentiel de simple couche :

$$u(x) = \mathcal{S}q(x), \quad \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e \iff (P_q) \begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_i \cup \Omega_e \\ [u]_\Gamma = 0 \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma = q \end{cases} \quad (50)$$

2. Pour le potentiel de double couche :

$$u(x) = -\mathcal{D}\varphi(x), \quad \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e \iff (P_\varphi) \begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_i \cup \Omega_e \\ [u]_\Gamma = \varphi \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma = 0 \end{cases} \quad (51)$$

## 6 Quelques équations intégrales

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour établir nos équations intégrales! Nous allons voir qu'il existe plusieurs équations intégrales associées à un même problème. Dans tous les cas, une équation intégrale revient à résoudre un problème posé sur le bord, avec une inconnue surfacique (au lieu d'une inconnue volumique comme ce serait le cas avec la méthode des éléments finis).

### 6.1 Problème de Dirichlet intérieur

On cherche à trouver la solution  $u$  du problème intérieur de Dirichlet, c'est à dire le problème (21) avec  $\Omega = \Omega_i$ . Nous allons voir quatre exemples de formulations intégrales de ce problème.

#### 6.1.1 Équation intégrale avec les traces (dite naturelle)

Cette approche dite naturelle part de l'expression de la solution donnée par (41), c'est à dire :

$$u(x) = \mathcal{S}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^i(x) - \mathcal{D}u^i(x), \quad \forall x \in \Omega_i$$

qui utilise une représentation avec des potentiels de simple et double couche dont les densités sont les traces "naturelles" de la solution. Exprimons la condition aux limites de Dirichlet, en prenant la trace intérieure de cette expression. D'après les résultats sur les traces des potentiels :

$$u^i = S\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^i - \left(-\frac{1}{2}u^i + Du^i\right)$$

Or ici  $u^i = u_d$  est connue. La seule inconnue dans cette expression est  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^i$ . En posant :

$$q = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^i$$

nous obtenons finalement l'équation intégrale : Trouver  $q$  solution de

$$Sq = \frac{1}{2}u_d + Du_d \quad \text{sur } \Gamma \quad (52)$$

C'est une équation intégrale dite de *première espèce*.

### 6.1.2 Approche avec un prolongement

Étant donné que ce qui nous intéresse, c'est la solution dans le domaine intérieur  $\Omega_i$ , on peut étendre cette solution d'une façon arbitraire au domaine extérieur  $\Omega_e$ . Supposons donc que  $u$  est prolongée dans  $\Omega_e$  de sorte qu'elle vérifie toujours l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_e$ . On peut alors appliquer la formule de représentation (43) :

$$\forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e, u(x) = \mathcal{S} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} (x) - \mathcal{D}[u]_{\Gamma}(x) \quad (53)$$

Il existe plusieurs façons de prolonger  $u$  dans  $\Omega_e$ , donnons les plus courantes :

**a- Équation intégrale avec un prolongement par 0.** Évidemment la fonction nulle est bien solution de l'équation de Helmholtz ! Si on prolonge  $u$  par 0 dans  $\Omega_e$ , on a

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} = \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i ; \quad [u]_{\Gamma} = u^i$$

Ce choix coïncide avec le choix fait précédemment et on retombe sur l'équation intégrale "naturelle" (52).

**b- Équation intégrale avec un prolongement par continuité : représentation par potentiel de simple couche.**

Ce choix revient à prolonger  $u$  dans  $\Omega^e$  de sorte qu'elle soit continue à la traversée de  $\Gamma$ , i.e. de sorte qu'elle vérifie :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_i \\ u = u_d \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_e \\ u = u_d \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (54)$$

ce qui revient à dire que  $[u]_{\Gamma} = 0$ . La représentation (53) montre alors que

$$\forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e, u(x) = \mathcal{S}q(x) \text{ avec } q = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma}$$

L'équation intégrale associée consiste à trouver  $q$  tel que

$$Sq = u_d \quad (55)$$

On retrouve une équation intégrale du même type que (52), de première espèce. L'inconnue n'est plus la trace de la dérivée normale mais son saut, et le second membre a changé, mais c'est le même opérateur intégral qui intervient.

**c- Équation intégrale avec un prolongement par continuité des dérivées normales : représentation par potentiel de double couche.** Cette fois-ci, on aimerait représenter la solution à l'aide d'un potentiel de double couche. Ceci est possible si on assure la continuité des dérivées normales, ce qui revient à prolonger  $u$  dans  $\Omega^e$  de sorte qu'elle vérifie :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_i \\ u = u_d \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_e \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^e = \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (56)$$

On a alors

$$\forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e, u(x) = -\mathcal{D}\varphi(x) \text{ avec } \varphi = [u]_{\Gamma}$$

et la trace intérieure sur  $\Gamma$  donne l'équation intégrale suivante : Trouver  $\varphi$  telle que

$$\left( \frac{1}{2}I - D \right) \varphi = u_d \text{ sur } \Gamma \quad (57)$$

Il s'agit cette fois d'une équation intégrale dite de *deuxième espèce*.

## 6.2 Problème de Neumann intérieur

On cherche à trouver la solution  $u$  du problème intérieur de Neumann, c'est à dire le problème (14) avec  $\Omega = \Omega_i$ . Nous avons vu dans ce qui précède qu'il existait plusieurs équations intégrales associées à un même problème. Nous allons faire ici un choix qui va donner un nouveau type d'équation intégrale par rapport à celles déjà vues.

### 6.2.1 Problème de Neumann avec représentation en potentiel de double couche

Nous choisissons de représenter la solution du problème de Neumann intérieur sous la forme

$$u(x) = -\mathcal{D}\varphi(x), \quad x \in \Omega_i \cup \Omega_e$$

ce qui revient à prolonger  $u$  dans  $\Omega_e$  par la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_e \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^e = \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (58)$$

de sorte que  $[u]_\Gamma = \varphi$  et  $\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma = 0$ . L'équation intégrale associée s'écrit alors : Trouver  $\varphi$  telle que

$$-N\varphi = g \text{ sur } \Gamma \quad (59)$$

Il s'agit de nouveau d'une équation intégrale dite de *première espèce*.

## 6.3 Conclusion

Pour résumer, il existe essentiellement quatre types d'équations intégrales :

$$\begin{cases} Sq = \psi & (EI_1) \\ (\pm \frac{1}{2}I - D)\varphi = \psi & (EI_2) \\ (\pm \frac{1}{2}I - D')q = g & (EI_3) \\ N\varphi = g & (EI_4) \end{cases}$$

## 7 Analyse mathématique d'une équation intégrale de première espèce

Nous nous intéressons ici à une équation intégrale du type  $(EI_1)$ . Plus précisément à l'équation intégrale (55) obtenue pour le problème de Dirichlet intérieur et extérieur (54), en représentant la solution sous forme d'un potentiel de simple couche de densité  $q$ ,

$$u(x) = \mathcal{S}q(x), \quad \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e$$

avec  $q = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma$ . Rappelons que l'équation intégrale consiste alors à trouver  $q$  tel que

$$Sq = u_d \quad (55)$$

**Remarque 11.** Si  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$ , alors  $u \in H^1(\Delta, \Omega_i \cup \Omega_e)$ . Par conséquent les traces des dérivées normales de  $u$ ,  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i$  et  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^e$  sont bien définies dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  (par dualité et formules de Green). Nous allons montrer que (55) est bien posée dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

D'après ce que nous avons vu dans les sections précédentes, nous pouvons remarquer l'équivalence suivante, qui nous permettra facilement de passer de l'inconnue surfacique à l'inconnue volumique et réciproquement :

$$u(x) = \mathcal{S}q(x), \quad \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e \iff (P_q) \begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_i \cup \Omega_e \\ [u]_\Gamma = 0 \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma = q \end{cases} \quad (60)$$

Démontrons le lemme de trace suivant :

**Lemme 2.** *Si  $u \in H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$  est solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$ , le saut de sa dérivée normale  $q = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$  vérifie :  $\exists C(\omega) > 0$  tel que*

$$\|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C(\omega) \|u\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \quad (61)$$

*Démonstration.* Soit  $u$  solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$ . Dans tout ce qui suit, nous supposons que  $u \in H^2(\Omega_i \cup \Omega_e)$  de sorte que les termes de bord peuvent bien être représentés par des intégrales de bord (et pas seulement par des crochets de dualité, si  $u$  est seulement dans  $H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$ ). La formule de Green appliquée dans  $\Omega_i$  et dans  $\Omega_e$  nous montre alors que, pour tout  $v \in H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^i \bar{v} d\gamma &= \int_{\Omega_i} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) d\Omega := a_{\Omega_i}(u, v) \\ \int_\Gamma \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^e \bar{v} d\gamma &= \int_{\Omega_e} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) d\Omega := a_{\Omega_e}(u, v) \end{aligned}$$

ce qui implique pour tout  $v \in H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$  tel que  $[v]_\Gamma = 0$  :

$$\int_\Gamma q \bar{v} d\gamma = \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) d\Omega := a(u, v) \quad (62)$$

La forme sesquilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est celle qui a été définie en (16) pour  $\Omega = \Omega_i \cup \Omega_e$ . Cette forme est clairement continue dans  $H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$ , de constante de continuité  $M_a(\omega)$  (voir (17)). Nous pouvons alors majorer, pour tout  $v \in H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$

$$\left| \int_\Gamma q \bar{v} d\gamma \right| \leq M_a(\omega) \|u\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \|v\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \quad (63)$$

Rappelons que la norme de  $q$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  est définie par :

$$\|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\phi \in H^{1/2}(\Gamma), \phi \neq 0} \frac{\left| \int_\Gamma q \bar{\phi} d\gamma \right|}{\|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}$$

Or d'après le lemme de relèvement 1, appliqué successivement à  $\Omega_i$  et  $\Omega_e$ , nous savons que pour tout  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$ , il existe un relèvement intérieur  $v_i = \mathcal{R}_i \phi \in H^1(\Omega_i)$  tel que  $\gamma_0^i v_i = \phi$  et un relèvement extérieur  $v_e = \mathcal{R}_e \phi \in H^1(\Omega_e)$  tel que  $\gamma_0^e v_e = \phi$  et qui vérifient

$$\|\mathcal{R}_i \phi\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \|\mathcal{R}_e \phi\|_{H^1(\Omega_e)} \leq C \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Par conséquent, en définissant  $v^\phi$  telle que  $v_{/\Omega_i}^\phi = v_i$  et  $v_{/\Omega_e}^\phi = v_e$ , on vérifie aisément que  $v^\phi \in H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$ ,  $[v^\phi]_\Gamma = 0$ ,  $v_{/\Gamma}^\phi = \phi$  et

$$\|v^\phi\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \leq C \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

Nous avons donc pour tout  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$  :

$$\left| \int_{\Gamma} q \bar{\phi} d\gamma \right| = \left| \int_{\Gamma} q \bar{v} \phi d\gamma \right| \leq M_a(\omega) \|u\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \|v^\phi\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)}$$

la dernière estimation provenant de (63). Par continuité du relèvement, on obtient :

$$\left| \int_{\Gamma} q \bar{\phi} d\gamma \right| \leq C(\omega) \|u\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

Par conséquent

$$\|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\phi \in H^{1/2}(\Gamma), \phi \neq 0} \frac{\left| \int_{\Gamma} q \bar{\phi} d\gamma \right|}{\|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \leq C(\omega) \|u\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)}$$

□

Ce lemme de trace fixe le cadre de travail pour l'équation intégrale associée au potentiel de simple couche : nous allons naturellement chercher la solution  $q$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Montrons la propriété de continuité suivante sur le potentiel de simple couche :

**Lemme 3.** *L'opérateur  $\mathcal{S}$  est continu de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$  et vérifie :  $\exists C_S(\omega) > 0$  telle que pour tout  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$*

$$\|\mathcal{S}q\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \leq C_S(\omega) \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad (64)$$

*Démonstration.* — À  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , on peut associer  $u^q = \mathcal{S}q \in H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$  qui vérifie le problème  $(P_q)$  d'après l'équivalence (60).

— De même à  $q' \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , on peut associer  $v^{q'} = \mathcal{S}q' \in H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$  qui vérifie le problème

$$(P_{q'}) \begin{cases} \Delta v + \omega^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_i \cup \Omega_e \\ [v]_{\Gamma} = 0 \\ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{\Gamma} = q' \end{cases}$$

En appliquant alors les formules de Green pour  $u^q$  et  $v^{q'}$ , dans  $\Omega_i$  puis dans  $\Omega_e$ , comme nous l'avons fait dans la démonstration du lemme 2, nous obtenons (62) qui peut se réécrire en utilisant que  $v_{\Gamma}^{q'} = Sq'$  :

$$\int_{\Gamma} q \bar{S}q' d\gamma = a(u^q, v^{q'}) \quad (65)$$

Or la forme  $a(.,.)$  est coercive (cf (19)) donc pour tout  $v \in H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)$

$$\alpha_a(\omega) \|v\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)}^2 \leq |a(v, v)|$$

Par conséquent on en déduit, pour  $u^q = \mathcal{S}q$

$$\begin{aligned} \alpha_a(\omega) \|u^q\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)}^2 &\leq |a(u^q, u^q)| = \left| \int_{\Gamma} q \bar{S}q d\gamma \right| \\ &\leq \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|Sq\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \tilde{C}_0 \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|u^q\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \end{aligned}$$

la dernière estimation provenant de la continuité de la trace  $\gamma_0$  (voir (6)) étant donné que  $Sq = \gamma_0(u^q)$ . On

en déduit finalement (64) avec  $C_S(\omega) = \frac{\tilde{C}_0}{\alpha_a(\omega)}$ .

□

Nous pouvons maintenant introduire la formulation variationnelle associée à (55) (toujours en supposant que les intégrales de bord ont un sens, sinon il faudrait plutôt considérer des crochets de dualité) :

$$\text{Trouver } q \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que } \int_{\Gamma} Sq(x)\overline{q'}(x)d\gamma_x = \int_{\Gamma} u_d(x)\overline{q'}(x)d\gamma_x \quad \forall q' \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (66)$$

ou encore, compte tenu de la définition de  $S$  : Trouver  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  tel que

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x-y)q(y)\overline{q'}(x)d\gamma_x d\gamma_y = \int_{\Gamma} u_d(x)\overline{q'}(x)d\gamma_x \quad \forall q' \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (67)$$

Par la suite nous introduisons les formes sesquilinéaire et antilinéaire suivantes :

$$b(q, q') = \int_{\Gamma} Sq(x)\overline{q'}(x)d\gamma_x, \quad L(q') = \int_{\Gamma} u_d(x)\overline{q'}(x)d\gamma_x$$

de sorte que la formulation variationnelle de notre équation intégrale devient :

$$\text{Trouver } q \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que } b(q, q') = L(q'), \quad \forall q' \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (68)$$

Le caractère bien posé de cette formulation variationnelle est donné par le :

**Théorème 7.** *Si  $u_d \in H^{1/2}(\Gamma)$ , le problème (66) admet une unique solution  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ . De plus la solution vérifie :*

$$\exists K(\omega) > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq K(\omega) \|u_d\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad (69)$$

*Démonstration.* Pour démontrer ce résultat, nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram. Pour ce faire, remarquons que nous pouvons relier la formulation variationnelle de l'équation intégrale à celle du problème volumique. En effet, grace aux formules de Green, nous avons montré la relation (65). En inversant les rôles de  $u^q$  et  $v^{q'}$ , ceci s'écrit :

$$\int_{\Gamma} q' \overline{Sq} d\gamma = a(v^{q'}, u^q)$$

Nous reconnaissons dans le terme de gauche la forme sesquilinéaire  $b$  ou plus précisément :

$$\overline{b(q, q')} = a(v^{q'}, u^q), \quad (70)$$

relation que nous allons utiliser pour vérifier que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont bien satisfaites.

- $V = H^{-1/2}(\Gamma)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$  est un espace de Hilbert
- $b(\cdot, \cdot)$  et  $L(\cdot)$  sont clairement des formes sesquilinéaire et antilinéaire.
- Continuité de  $L$  : on a par définition de la norme duale, pour tout  $q' \in H^{-1/2}(\Gamma)$  :

$$|L(q')| \leq \|u_d\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|q'\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \implies M_L = \|u_d\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

- Continuité de  $b$  : grâce à la relation (70), nous avons :

$$|b(q, q')| = |a(v^{q'}, u^q)| \leq M_a(\omega) \|v^{q'}\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)} \|u^q\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)}$$

Or  $v^{q'} = \mathcal{S}q'$  et  $u^q = \mathcal{S}q$ . En utilisant l'estimation de continuité de  $\mathcal{S}$ , (64), on obtient :

$$|b(q, q')| = |a(v^{q'}, u^q)| \leq M_a(\omega) C_S(\omega)^2 \|q'\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

On notera la constante de continuité de  $b$ ,  $M_b(\omega) = M_a(\omega) C_S(\omega)^2$ .

- Coercivité de  $b$  : on reprend la relation (70) qui montre que

$$|b(q', q')| = |a(v^{q'}, v^{q'})| \geq \alpha_a(\omega) \|v^{q'}\|_{H^1(\Omega_i \cup \Omega_e)}^2$$

En utilisant la continuité du saut de dérivée normale (voir (61)), on déduit

$$|b(q', q')| \geq \frac{\alpha_a(\omega)}{C(\omega)^2} \|q'\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2$$

$b$  est donc coercive avec une constante de coercivité  $\alpha_b(\omega) = \frac{\alpha_a(\omega)}{C(\omega)^2}$ .

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont donc bien satisfaites. On en conclue qu'il existe une unique solution  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  qui vérifie

$$\|q'\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \frac{M_L(\omega)}{\alpha_b(\omega)} = \frac{C(\omega)^2}{\alpha_a(\omega)} \|u_d\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

c'est à dire (69) avec  $K(\omega) = \frac{C(\omega)^2}{\alpha_a(\omega)}$ .

□

## Références

- [1] P. Ciarlet and E. Lunéville. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique - Tome 1, Concepts généraux*. Ensta edition.
- [2] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Monographs and Studies in Mathematics. Pitman.
- [3] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Recherche en Mathématiques Appliquées. Masson edition.
- [4] M. Lenoir. ÉQUATIONS INTÉGRALES ET PROBLÈMES DE DIFFRACTION. Cours ENSTA C7-2, édition 2010-2011 (en ligne).
- [5] J. C. Nédélec. Approximation des Equations Intégrales en Mécanique et en Physique. Technical report, Ecole Polytechnique, CMAP, 1977. Cours de l'Ecole d'Eté CEA-EDF-INRIA.
- [6] Jean-Claude Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2001. Integral representations for harmonic problems.
- [7] Sauter, S.A. and Schwab, C. *Boundary Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg 2010.
- [8] François Trèves. *Basic Linear Partial Differential Equations*.