

Modélisation d'assemblages plaques-poutres en élastodynamique. Application au couplage entre les cordes et la table d'harmonie d'un piano au chevalet

J. Chabassier (Juliette.Chabassier@inria.fr), P. Joly, S. Tordeux
INRIA Bordeaux Sud Ouest, Equipe Magique 3-D – INRIA Saclay, Equipe Poems

1 Motivation

La table d'harmonie du piano est l'élément rayonnant de l'instrument. Elle est renforcée sur sa face inférieure par une série de raidisseurs, et est fixée par sa face supérieure à une ou plusieurs pièces de bois qu'on appelle le(s) chevalet(s) et dont le rôle est de transmettre les vibrations des cordes à la table d'harmonie. Les cordes passent de part et d'autre de pointes en métal qui sont plantées en biais sur le chevalet (voir la figure ci dessous).



(a) Deux face de la table

(b) Pointes

Cette condition de contact entre les cordes et le chevalet influence de façon complexe la vibration des cordes, en contribuant par exemple à les mettre en mouvement de rotation. Elle détermine de plus la façon dont les cordes sollicitent la table d'harmonie, ce qui influe fortement sur le timbre du piano. Par ailleurs le chevalet est lui même un élément vibrant que l'on peut assimiler à une poutre de par son caractère allongé. Des mesures préliminaires ont en effet mis en évidence que les modes du chevalet semblent contraindre la dynamique de la table d'harmonie.

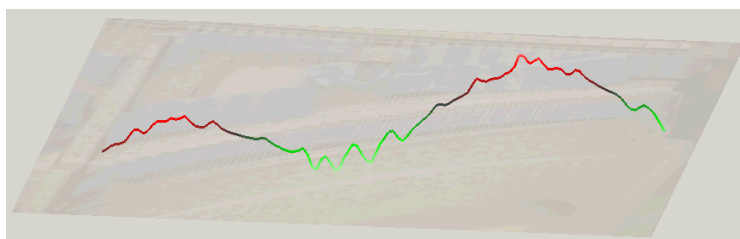


FIGURE 1 – Vibration du chevalet

Dans cette thèse, nous nous proposons de mieux comprendre cette condition de contact, en modélisant d'une part le chevalet comme un élément vibrant et couplé au reste du système, et d'autre part la présence des pointes. Une difficulté réside dans l'écriture rigoureuse de la transmission des efforts et des déplacements entre les différentes parties du piano, tout en considérant le chevalet comme une poutre monodimensionnelle et non pas une pièce de bois en trois dimensions, pour des raisons d'efficacité de simulation. Une autre difficulté réside dans la description du contact entre les pointes et les cordes, un compromis devant être trouvé entre réalisme et efficacité.

2 Modélisation

L'un des principaux challenges, du point de vue mathématique, liés à cette thèse est la conception et la justification d'un modèle par équations aux dérivées pour le couplage chevalet - table d'harmonie qui soit viable, au sens où il contourne l'utilisation d'un modèle 3D, trop coûteux.

D'un point de vue mathématique il s'agit de proposer un modèle "élastodynamique" de type 2D-1D pour la propagation d'ondes élastiques dans un solide constitué par l'assemblage d'une plaque mince et d'une poutre mince (collée sur la plaque dans le sens de sa longueur). Cette question dépasse bien évidemment la seule application au piano. L'outil de base sera l'analyse asymptotique du modèle 3D complet lorsque l'épaisseur de la plaque et les dimensions transverses de la poutre sont proportionnelles à un petit paramètre adimensionnel δ . Une telle approche a été très largement étudiée dans la littérature dans le cas statique, lorsque l'on s'intéresse à la plaque seule (auquel cas la démarche débouche sur des modèles comme celui de Kirchhoff-Love celui de Mindlin-Reissner [DFY04], [Rei45]) ou à la poutre seule (auquel cas on peut obtenir par exemple les modèles d'Euler-Bernoulli ou de Timoschenko [HBW99],[Tim21]). Deux nouveautés essentielles devront être abordées dans le cadre de la thèse :

- Le fait qu'on s'intéresse à la propagation des ondes ce qui implique de traiter le problème dynamique. Dans ce cas, une nouvelle échelle de longueur apparaît : la longueur d'onde.

Une question importante consistera alors à délimiter le domaine de validité de tel ou tel modèle approché, notamment en ce qui concerne la gamme de fréquences (de sources) utilisable et, autant que faire se peut, quantifier l'erreur commise (ce dernier point pouvant alors aider à comparer divers modèles approchés).

- le fait que l'on s'intéresse au couplage poutre-plaque ce qui pose, à la limite $\delta \rightarrow 0$, la question d'un couplage entre un modèle 1D et un modèle 2D. Pour ce faire, un nouvel outil d'analyse devra être utilisé : la méthode des développements asymptotiques raccordés [JT08].

Il s'agira bien entendu dans un premier temps de suivre le scénario classique consistant à proposer un ansatz pour le développement asymptotique de la solution, obtenir terme à terme les différents termes du développement, ce d'un point de vue formel, et enfin justifier ce développement par des estimations d'erreur. Dans un second temps, il s'agira de proposer des modèles simplifiés construits à partir du développement asymptotique. On s'attachera particulièrement au caractère bien posé de ces modèles, à leur précision et enfin à leur adéquation à une approximation numérique efficace.

3 Application à la modélisation et la simulation numérique du piano

La valorisation des études théoriques effectuées se traduira par l'intégration des modèles proposés dans l'outil de simulation existant pour la simulation du piano.

Lors d'une précédente thèse portant sur la modélisation d'un piano de concert, un modèle et sa discrétisation ont été proposés dans [CCJ13]. Les schémas numériques proposés ont été implémentés dans le code de simulation montjoie¹. Ils reposent sur une discrétisation en espace par éléments finis et en temps par différences finies assurant la dissipation d'une énergie discrète. La modélisation du chevalet était sommaire et ce travail a pour l'ambition de perfectionner ce modèle.

Dans cette thèse, il s'agira de proposer des modèles de couplage du système table d'harmonie-chevalet avec les cordes (dans l'objectif de mieux comprendre et expliquer les phénomènes de double décroissance et de double polarisation des cordes), puis d'analyser le caractère bien posé des systèmes obtenus.

Une seconde étape consistera à proposer et analyser (stabilité) des schémas numériques adaptés à ces modèles. En particulier, une méthode robuste et efficace pour parvenir à cet objectif est d'assurer que la discrétisation proposée assure la dissipation d'une énergie discrète.

1. montjoie.gforge.inria.fr

Enfin, il s’agira d’implémenter ces schémas dans la librairie de calcul scientifique montjoie écrite en C++, afin de les intégrer au modèle de piano complet décrit dans [CCJ13].

Une dernière étape consistera à valider le modèle nouvellement proposé en réalisant des simulations numériques que l’on pourra comparer à l’expérience.

Profil recherché

- Etudiant.e en master 2 (université ou école d’ingénieur.e.s)
- Bonnes connaissances en mathématiques appliquées

Références

- [CCJ13] Juliette Chabassier, Antoine Chaigne, and Patrick Joly. Modeling and simulation of a grand piano. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 134(1) :648–665, 2013.
- [DFY04] Monique Dauge, Erwan Faou, and Zohar Yosibash. Plates and shells : Asymptotic expansions and hierarchical models. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, pages 1–49, Feb 2004.
- [HBW99] SM Han, H Benaroya, and T Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5) :935–988, 1999.
- [JT08] Patrick Joly and Sébastien Tordeux. Matching of asymptotic expansions for waves propagation in media with thin slots. II. The error estimates. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(2) :193–221, 2008.
- [Rei45] E Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 12 :69–77, 1945.
- [Tim21] S Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 744, 1921.