Proposition de thèse au laboratoire *POEMS*

UMR 7231 CNRS/INRIA/ENSTA

Année scolaire 2012/2013

Fiabilité et optimisation des calculs obtenus par des formulations intégrales en propagation d'ondes

▷ **Contexte Scientifique.** Différentes méthodes numériques peuvent être utilisées pour simuler la propagation des ondes (acoustiques, électromagnétiques ou élastodynamiques). Le principale avantage de la méthode des éléments de frontière (BEM pour Boundary Element Method), basée sur une formulation équations intégrales, est de ne nécessiter que la discrétisation de la frontière du domaine et de prendre en compte de manière exacte les conditions de radiation à l'infini. Par conséquent, les BEMs sont bien adaptées pour étudier les problèmes dans des domaines (semi-)infinis tels qu'on en rencontre pour étudier la propagation d'une onde électromagnétique ou sismique. Cependant, les BEMs standards conduisent à un système plein limitant les possibilités d'application sur des cas réalistes (en terme de complexité géométrique ou de spectre de fréquence). Pour s'affranchir de ces limitations, des travaux récents, ont concerné l'accélération de la BEM par la Méthode Multipôle Rapide (FMM pour Fast Multipole Method en anglais) en électromagnétisme [3] ou en visco-élastodynamique [4] par exemple. La FMM permet ainsi de réduire drastiquement le temps de résolution ainsi que les besoins en mémoire de la BEM et ainsi traiter des problèmes beaucoup plus gros [2].

Jusqu'à présent, la majorité des travaux ont concerné l'accélération de la résolution des équations intégrales de frontière pour traiter des problèmes réalistes. Elles sont aujourd'hui utilisées aussi bien pour calculer le rayonnement d'une antenne spatiale ou la Signature Equivalente Radar d'un avion, que pour déterminer la fréquence de résonance d'un filtre à résonateurs couplés ou pour simuler la propagation des ondes sismiques dans un bassin sédimentaire. Comparativement aux méthodes de type éléments finis, les méthodes intégrales demeurent pourtant insuffisamment popularisées, leur utilisation restant généralement l'affaire de spécialistes expérimentés.

Nous pensons que l'un des obstacles à une plus grande exploitation de ces méthodes est l'absence d'outils automatiques, permettant de garantir la précision de la solution calculée. L'outil le plus adéquat pour réaliser cette tâche est ce qu'on appelle un estimateur d'erreur *a posteriori*. Ce type d'estimateur représente une quantité calculable (ne dépendant que de la solution discrète et des données du problème) qui est équivalente à l'erreur entre la solution exacte (qui est inconnue) et la solution approchée. L'adaptation automatique de maillage via l'analyse d'erreur *a posteriori* a prouvé son efficacité pour de nombreux problèmes en permettant une réduction notable du coût de calcul (en réduisant le nombre de degrés de liberté) tout en atteignant une solution approchée à la précision désirée. La principale difficulté est que ce type d'approche dépend fortement du problème et du schéma numérique. Le développement de tels outils reste un challenge dans de nombreuses situations. En particulier, ces techniques sont quasiment inexistantes dans le domaine des équations intégrales, alors que leur importance n'a fait que croître dans le domaine des méthodes de type éléments finis. Il existe pourtant un certain nombre de résultats théoriques montrant la possibilité d'établir des estimations d'erreur *a posteriori* pour les formulations intégrales, mais ces estimateurs ne semblent pas avoir été expérimentés, et encore moins exploités, de façon pratique et systématique dans les grands codes de calcul. De plus, peu de ces résultats traitent le cas des noyaux oscillants qui sont caractéristiques des phénomènes de propagation. Le développement d'estimateurs d'erreur est donc un point essentiel pour ensuite proposer des procédures d'adaptation de maillage, qui constituent une méthode complémentaire à la FMM pour réduire le coût de calcul des BEMs. En choisissant le maillage optimal pour obtenir un niveau voulu de précision, on peut ainsi réduire le nombre de degrés de liberté.

▷ **Objectifs.** Les objectifs de cette thèse sont :

- **Proposer et analyser des estimateurs d'erreur *a posteriori* adaptés à l'approximation des équations intégrales en propagation d'ondes.** Nous considèrerons les trois approches classiques [1, 7] de construction : estimateur de type résidu, de type reconstruction locale et de type implicite. Le but étant d'identifier le "meilleur" candidat au sens du compromis coût de calcul de l'estimateur-efficacité de ce dernier. Il faudra en effet veiller à ce que la réduction du nombre de degrés de liberté, et donc du temps de résolution, apportée par l'estimateur ne soit pas contre-balancée par son coût de calcul. Une partie importante de ce travail consistera à faire une étude bibliographique approfondie des approches existantes pour les BEMs. L'article [6] sera un point de départ. Pour cette première phase, on se placera dans le cadre de la BEM standard pour ne pas être affecté par les approximations (bien que limitées) liées à l'accélération par la FMM.
- **Utiliser le meilleur estimateur d'erreur *a posteriori*, identifié pour la BEM standard, dans le cadre d'une résolution itérative basée sur une accélération FMM.** Dans un premier temps, nous négligerons l'erreur algébrique liée à la résolution approchée du système linéaire (avec GMRES). En effet, contrairement à une résolution directe, les solveurs itératifs conduisent à une solution du système linéaire approchée (à une précision donnée). Nous identifierons des estimateurs permettant de quantifier les erreurs liées au schéma d'approximation et à la méthode FMM. Nous utiliserons ces indicateurs pour adapter l'approximation FMM à l'erreur de discrétisation. Dans un second temps, nous essayerons de prendre en compte l'erreur algébrique dans l'estimateur. Nous pourrons ainsi proposer des critères d'arrêt pour la méthode itérative adaptés aux approximations faites en amont de la résolution algébrique. Ce point est très important car le temps de calcul est linéaire avec le nombre d'itérations. Il n'existe actuellement que très peu de travaux pour déterminer le critère d'arrêt optimal du solveur itératif [5]. Ce critère est souvent basé sur le résidu mais le lien avec la solution n'est pas établi, en particulier dans le cadre de la FMM. La définition d'un critère optimal pourra certainement contribuer de façon significative à la réduction des coûts de calcul mais aussi à la certification des résultats. En résumé, le but est de pouvoir adapter automatiquement la méthode de résolution (FMM + solveur itératif) à la discrétisation choisie afin de réduire le coût globale de la méthode mais aussi de certifier la qualité des résultats.

- **Comprendre comment inscrire les différents estimateurs proposés dans le cadre d'une stratégie globale d'adaptation de maillage.** Le but est de proposer une stratégie de construction automatique de la solution approchée garantissant la précision désirée et un coût de calcul adéquat.

▷ **Encadrement.** Ce travail entre dans le cadre d'une collaboration entre l'ENSTA et l'ONERA. La thèse sera co-encadrée par Stéphanie Chaillat (CR CNRS au laboratoire POEMS) et par Sébastien Pernet (ONERA Toulouse).

References

[1] M. Ainsworth, J.T. Oden, A posteriori error analysis estimation in finite element analysis. *Pure and Applied Mathematics* , Wiley-Interscience, 2000.

[2] B. Carpentieri, B., I.S. Duff, L. Giraud, G. Sylvand, Combining fast multipole techniques and an approximate inverse preconditioner for large parallel electromagnetics calculations. *SIAM J. Sci. Comput.* , Vol. 27, 774-792, 2005.

[3] E. Darve, The Fast Multipole Method: Numerical Implementation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 160, 195-240, 2000.

[4] E. Grasso, S.Chaillat, M.Bonnet, J.-F. Semblat, Application of the multi-level time-harmonic fast multipole BEM to 3-D visco-elastodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, 744-758, 2012.

[5] P. Jiránek, Z. Strakos, M. Vohralík, A posteriori error estimates including algebraic error and stopping criteria for iterative solvers. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 32, 1567-1590, 2010.

[6] E. Kita, N. Kamiya, Error estimation and adaptive mesh refinement in boundary element method, an overview. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 25, 479-495, 2001.

[7] R. Verfürth, A review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques. Wiley-Teubner, 1996.